Überdeckung eines Polygons durch eine möglichst geringe Anzahl konvexer Polygone

Khalil Ibrahim,Philipp Kühnel,Talha Günes

Universität Salzburg

March 1, 2024

Übersicht

Defintion des Polygon

Definition

Ein Polygon oder Vieleck ist ein geschlossener Streckenzug in einer Ebene E. Das heißt ein Streckenzug in E, bei dem Anfangs- und Endpunkt zusammenfallen.

Mathematische Definition für Polygon

Sei $\{p_1, \dots, p_{n-1}, p_n\}$, $p_i \in \mathbb{R}^2$, $1 \leq i \leq n$ die Menge von n verschiedenen Punkten. Dann ist die Menge

$$Q = \{(p_1, p_2), (p_2, p_3), \dots, (p_{n-1}, p_n)\}$$

ein Polygon.

[0] Triangulationen und Friesmuster in der Mathematik, Karl-Franzens University of Graz

Ein einfaches Polygon

Ein einfaches Polygon ist eine abgeschlossene Fläche in der Ebene, die von einem einfachen Zyklus aus geraden Linien eingeschlossen wird.

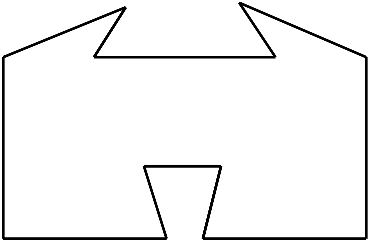

Figure 1: Einfaches Polygon

[0] Joseph O'Rourke and Subhash Suri Handbook of Discrete and Computational Geometry, Second Edition

Klassifikation eines Polygons 2/5

Konvexes Polygon

Der Streckenzug, der zwei beliebige Punkte innerhalb des Polygons verbindet, liegt innerhalb des Polygons und alle Innenwinkel sind kleiner als 180°.

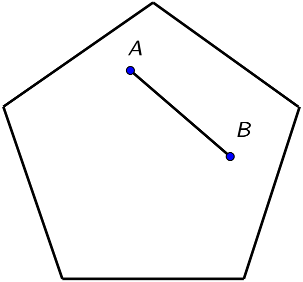

Figure 2: Konvexes Polygon

[0] Joseph O'Rourke and Subhash Suri Handbook of Discrete and Computational Geometry, Second Edition

Klassifikation eines Polygons 3/5

Nicht konvexes (konkaves) Polygon

Der Streckenzug, der zwei beliebige Punkte innerhalb des Polygons verbindet, liegt außerhalb des Polygons und einer Innenwinkel ist größer als 180°.

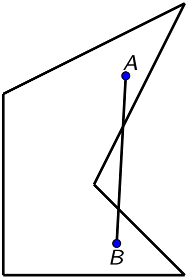

Figure 3: Nicht konvexes (konkaves) Polygon

[0] Joseph O'Rourke and Subhash Suri Handbook of Discrete and Computational Geometry, Second Edition

Polygon mit und ohne Löchern

Polygon mit Löchern

Ein Polygon mit Löchern ist ein komplexeres Gebilde, das eine äußere Begrenzung und mindestens ein inneres Loch oder mehrere Löcher aufweist. Die äußere Begrenzung und die inneren Löcher sind wiederum einfache Polygone.

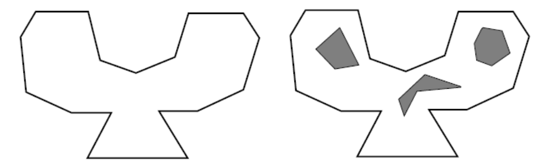

Figure 4: Polygon mit und ohne Löchern.

[0] Joseph O'Rourke and Subhash Suri Handbook of Discrete and Computational Geometry, Second Edition

Definition Hilfsmittel

Steiner-Punkt

Ein Steiner-Punkt ist ein Eckpunkt/Knoten, der nicht Teil der Eingabemenge ist.

Triangulation

Unterteilung eines Polygons in Dreiecke

Delaunay Triangulation

Selbes Verfahren wie bei der Triangulation, aber bei der Wahl der Knoten wird das Delaunay Kriteritum verwendet

[0] Joseph O'Rourke and Subhash Suri Handbook of Discrete and Computational Geometry, Second Edition

Problem

- Die Überdeckung eines Polygons durch eine möglichst geringe Anzahl konvexer Polygone
- Das Eingabepolygon kann sehr unterschiedlich sein und auch Löcher haben
- Das Problem ist *NP*-Hart
- Das Problem ist $\exists\mathbb{R}$-Komplett

[0] Minimum Coverage by Convex Polygons: The CG:SHOP Challenge 2023

Kürzliche Ereignisse

- Kürzliche Herausforderung: CG: SHOP 2023 Challenge (Computational Geometry: Solving Hard Optimization Problems)
- Ursprung liegt in der 2019 Computational Geometry Week
- Fokusgruppen: Algorithmische Geometrie und Kombinatorische Optimierung
- Die besten Lösungen werden bei den Publikationen des SoCG (Symposium on Computational Geometry) vorgetragen

Kürzliche Ereignisse

- Teilnehmer: Forschungsgruppen und Studenten
- Kategorien: Open Class und Junior Class
- Keine Einschränkung der Geräte oder Rechenzeit

Ziel

- Einen Algorithmus finden der möglichst passende konevexe Stücke berechnet
- Dieser Algorithmus soll auch bei verschiedenen Arten von Polygonen gleich gut funktionieren
- Diese Lösung so schnell wie möglich durchsetzt

[0] Minimum Coverage by Convex Polygons: The CG:SHOP Challenge 2023

Beispiel

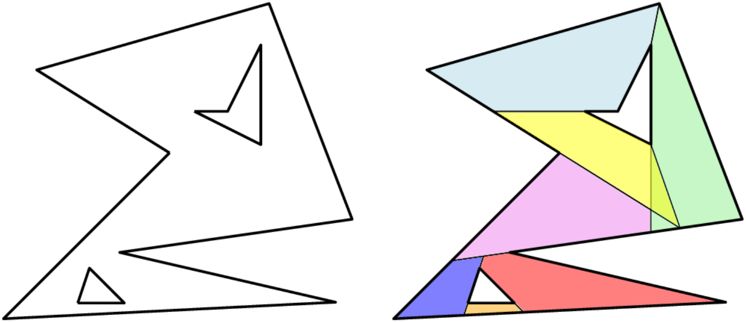

Figure 5: Vor und nach Überdeckung

[0] Minimum Coverage by Convex Polygons: The CG:SHOP Challenge 2023

Algorithmen

Shadoks Team Phase 1

- Manipulierten Bron-Kerbosh Algorithmus, um Sammlung S von konvexen Polygonen zu bekommen.
- Random-Bloating Verfahren um die konvexen Polygone zu vergrößern.
- Überprüfen, ob das vergrößerte Polygon in Ausgangspolygon P liegt.
- Hinzufügen des vergrößerten Polygons zu den konvexen Polygonen S.

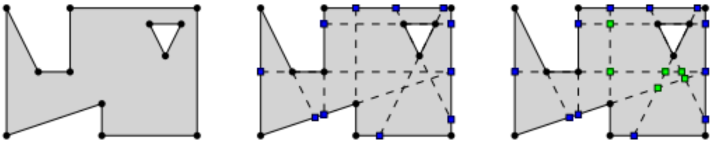

Figure 6: P , P nach Bron-Kerbosh, P nach modifizieren Bron-Kerbosh

[0] G. D. da Fonseca. Shadoks approach to convex covering. In Symposium on Computational Geometry (SoCG), 2023.

Algorithmen

Shadoks Team Phase 2

- Teil der Sammlung S wird verwendet, um das Polygon P zu überdecken (Set Cover Problem).
- Zwei Ansetze wurden verwendet, um das Problem zu lösen.
- Bei dem Integer Programming werden die konvexen Polygone als binäre Variablen dargestellt.
- Um die optimale Lösung zu finden, wurde der CPLEX-Solver verwendet.
- Bei dem Simulation Annealing wurde ein Optimierung-Algorithmus verwendet.
- Angefangen mit einer ausgangs Lösung, um dann iterativ den Lösungsraum zu erkunden.

[0] G. D. da Fonseca. Shadoks approach to convex covering. In Symposium on Computational Geometry (SoCG), 2023.

Algorithmen

Team DIKU Schritt 1 und 2

- Triangulation des Polygons mit Delaunay-Triangulation und Einfügen von Steiner-Punkte.
- Erstellen eines Sichtbarkeit-Grafen, um zu sehen, ob die Konvexe Hülle in P liegt.
- Breath-First-Search, um die Berechnungskomplexität zu reduzieren.

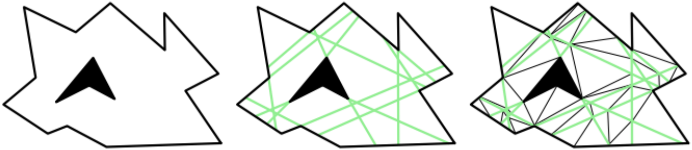

Figure 7: Left: Polygon P , extensions of P , and extension partition of P

[0] M. Abrahamsen, W. B. Meyling, and A. Nusser. Constructing concise convex covers via clique covers. In Symposium on Computational Geometry (SoCG), 2023.

Team DIKU Schritt 3

- Der Algorithmus bestimmt im letzten Schritt eine minimale Vertex-Clique im Sichtbarkeitsgraphen.
- In dieser Clique sind alle Dreiecke enthalten, und sehen gegenseitig alle Punkte des anderen Dreiecks.
- Nach der Durchführung aller Schritte wird über alle Polygon iteriert um Redundanz auszuschließen.

[0] M. Abrahamsen, W. B. Meyling, and A. Nusser. Constructing concise convex covers via clique covers. In Symposium on Computational Geometry (SoCG), 2023.

Bewertung des Wettbewerbs 1/2

- Der Wettbewerb läuft mit insgesamt 206 Instanzen.
- Oft schwierig, eine Lösung zu finden, die nahe am Optimum liegt.
- Anstatt einer linearen Bewertungsfunktion wird eine quadratische Bewertungsfunktion verwendet
- Diese Funktion berücksichtigt das Verhältnis der Anzahl der konvexen Stücke der besten Lösung zu den anderen Teilnehmern

[0] Minimum Coverage by Convex Polygons: The CG:SHOP Challenge 2023

Bewertung des Wettbewerbs 2/2

- Punkte pro Team und Instanz mit einer quadratischen Funktion berechnet.

$$S_T(I) = \frac{B(I)^2}{T(I)^2}$$

- Ein Team erhält 1 Punkt pro Instanz, wenn seine Lösung nicht von einem anderen Team geschlagen wurde.
- Der Gesamtpunkteanzahl eines Teams ist die Summe aller Punkte über alle Instanzen.
- Bei Punktegleichstand entscheidet die Zeit die verwendet wurde um das Problem zu lösen

[0] Minimum Coverage by Convex Polygons: The CG:SHOP Challenge 2023

Ergebnistablle des Wettebewerb

Rang	Team	Score	Junior
1	DIKU(AMW)	201.571	
2	Shadoks	198.347	
3	BX23	144.150	
4	SmartLab	142.925	✓
5	agr	122.40	
6	rkPlayground	121.311	✓
7	Karteflan	103.392	✓
8	Ofir	103.223	
9	pjgblt	103.127	✓
10	cgl@tau	100.893	

Figure 8: Die besten 10 Teams gereiht nach Gesamtpunktzahl und auf drei Dezimalstellen gerundet. Teams, die die Kriterien für die Einstufung als Juniorteam erfüllen, haben ein Häkchen in der Spalte "Junior"

[0] Minimum Coverage by Convex Polygons: The CG:SHOP Challenge 2023

References

Joseph O'Rourke and Subhash Suri
Handbook of Discrete and Computational Geometry, Second Edition

Guilherme Dias da Fonseca
Shadoks Approach to Convex Covering

Katharina Fercher
Triangulationen und Friesmuster in der Mathematik

Peter Fleischmann
Mesh Generation for Technology CAD in Three Dimensions

aram, Alon and Fogel, Efi and Halperin, Dan and Hemmer, Michael and Morr, Sebastian
Exact Minkowski sums of polygons with holes

acob E. Goodman and Joseph O'Rourke
Handbook of Discrete and Computational Geometry, Second Edition

.W. Lucas
An Introduction to the Delaunay Triangulation

[1]

The End