
W.A.P.

Finden von Nullstellen von univariaten Polynomen vom Grad fünf oder höher

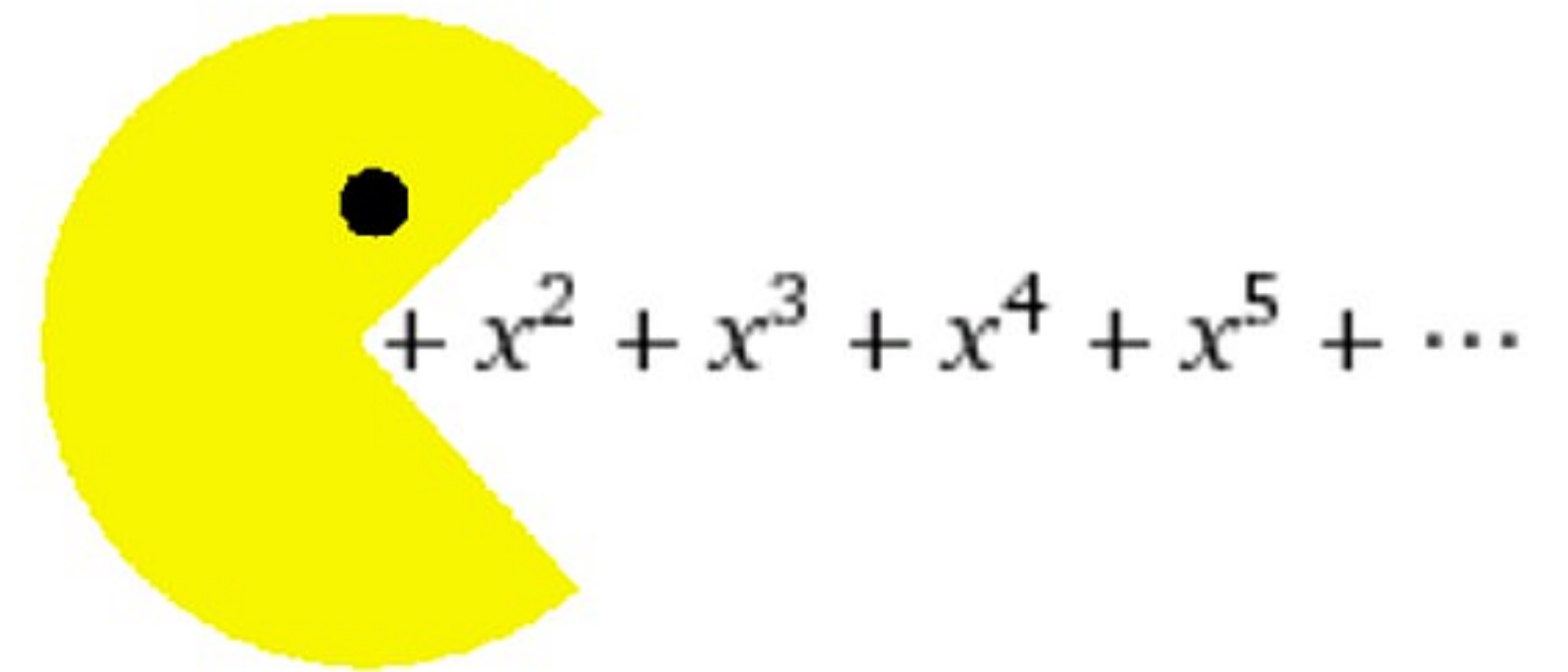
Aleksandr Grek

Daniil Barkov

Nikita Semkin

EINFÜHRUNG

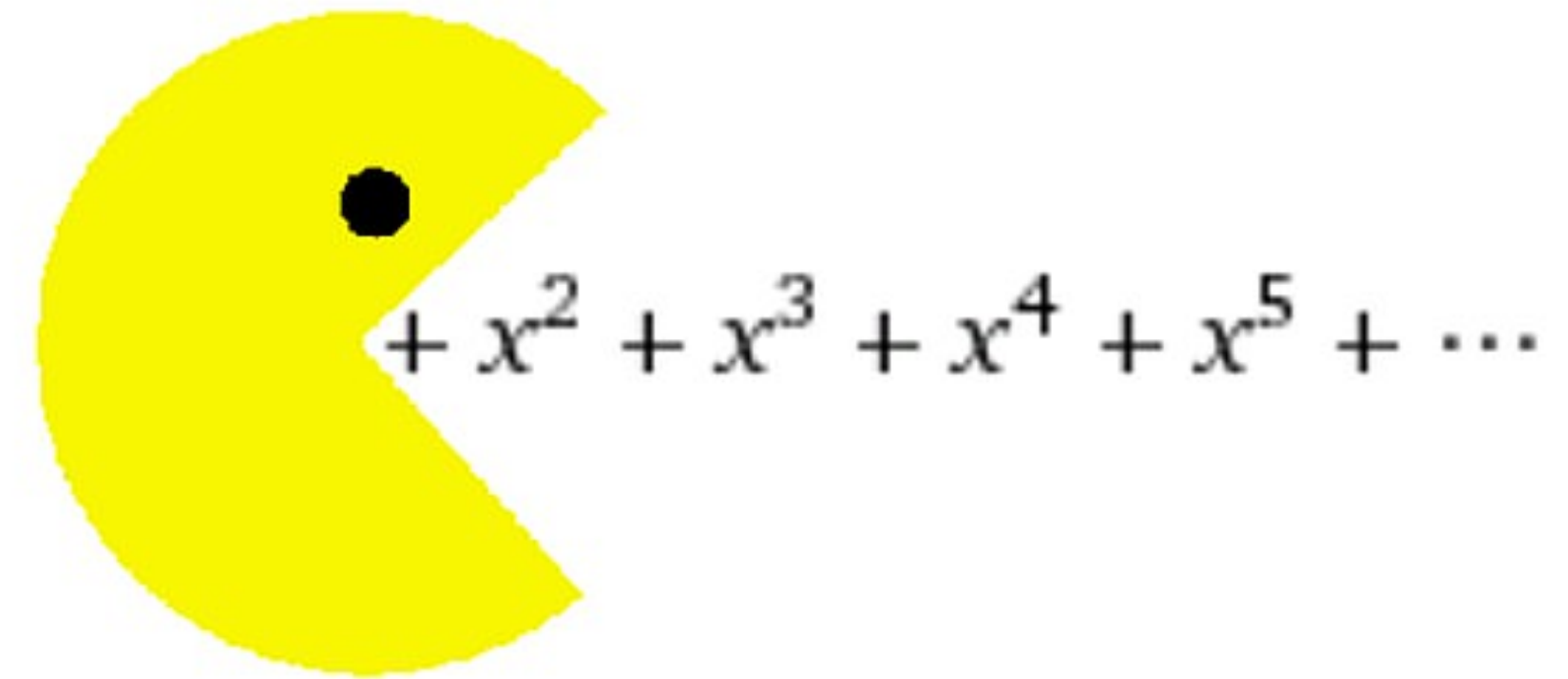
Polynom-nom-nom-nomial



EINFÜHRUNG

➤ Was sind die Polynomen?

Polynom-nom-nom-nomial

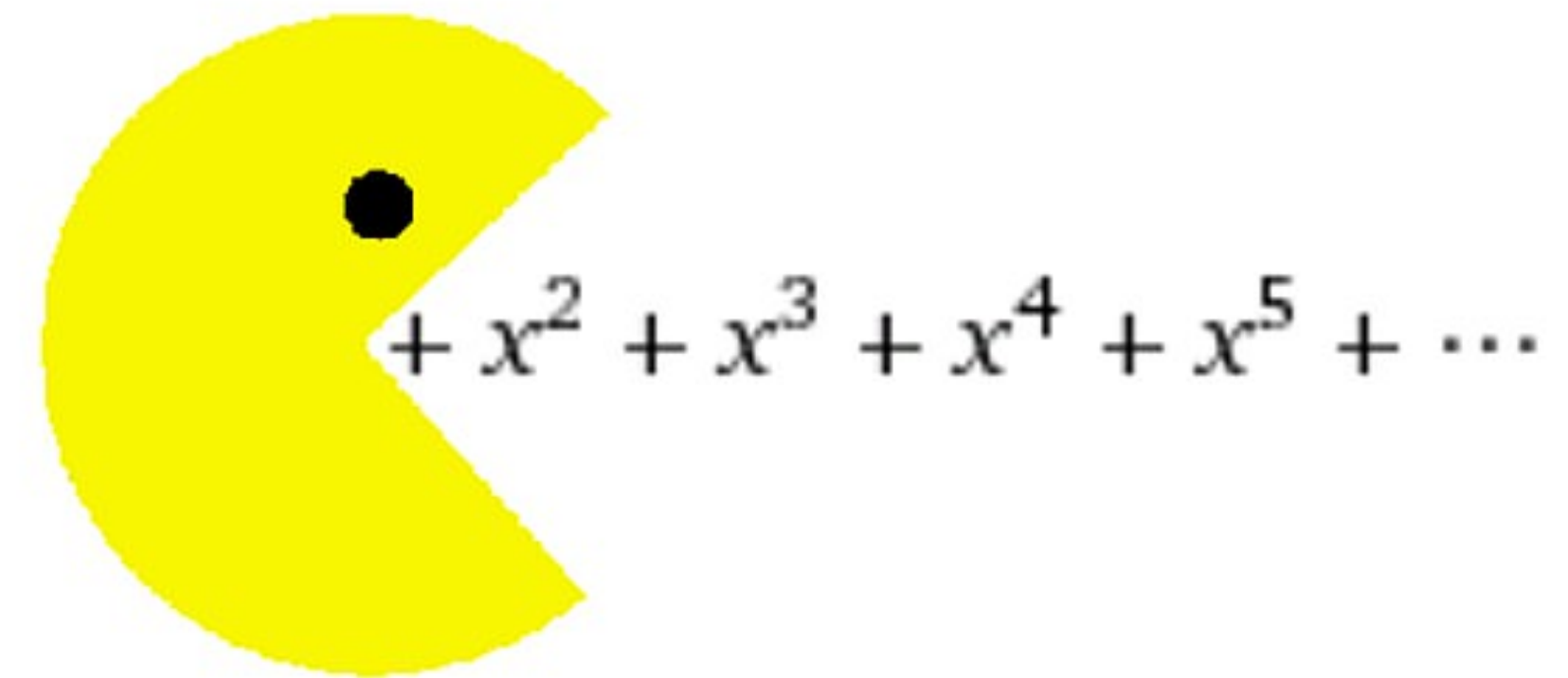


EINFÜHRUNG

➤ Was sind die Polynomen?

Beispiele :

Polynom-nom-nom-nomial



EINFÜHRUNG

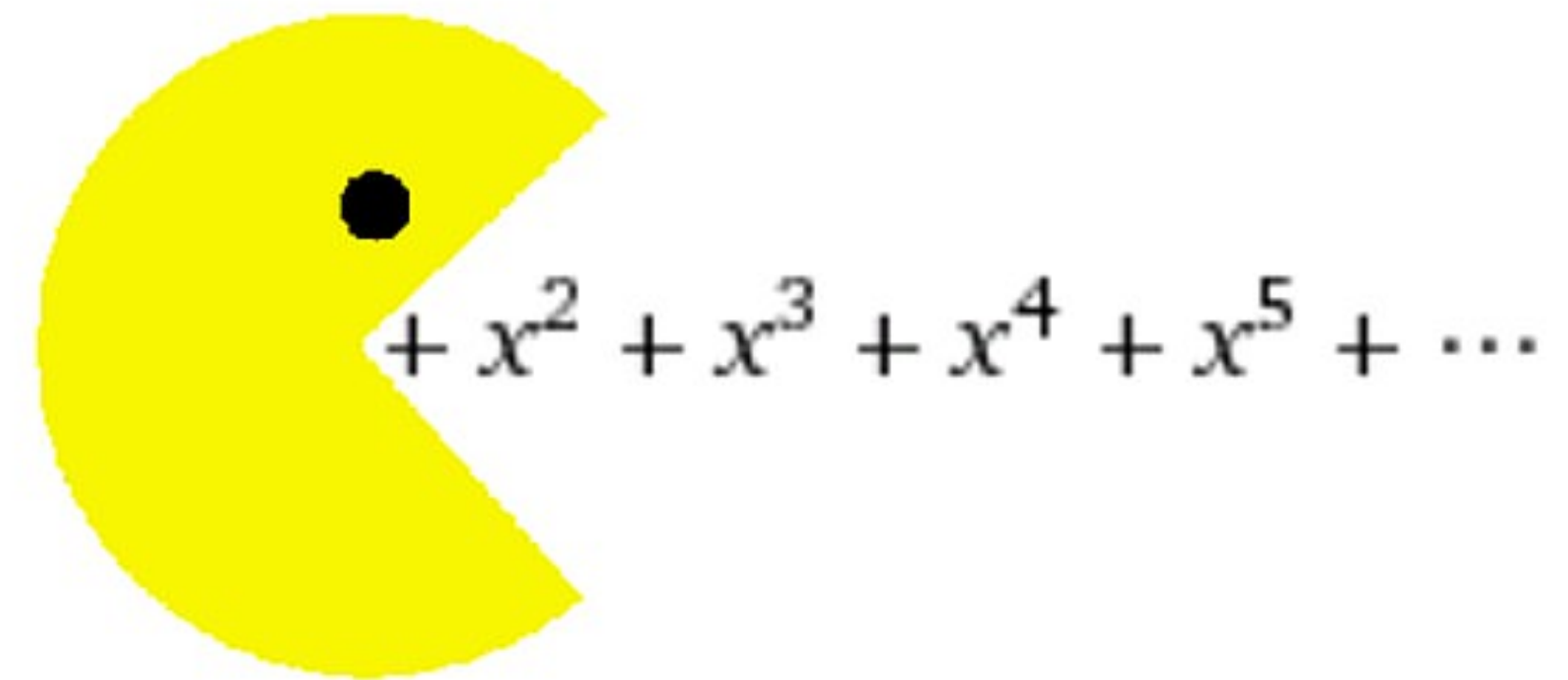
➤ Was sind die Polynomen?

Beispiele : $3x^2 + 2x + 5$

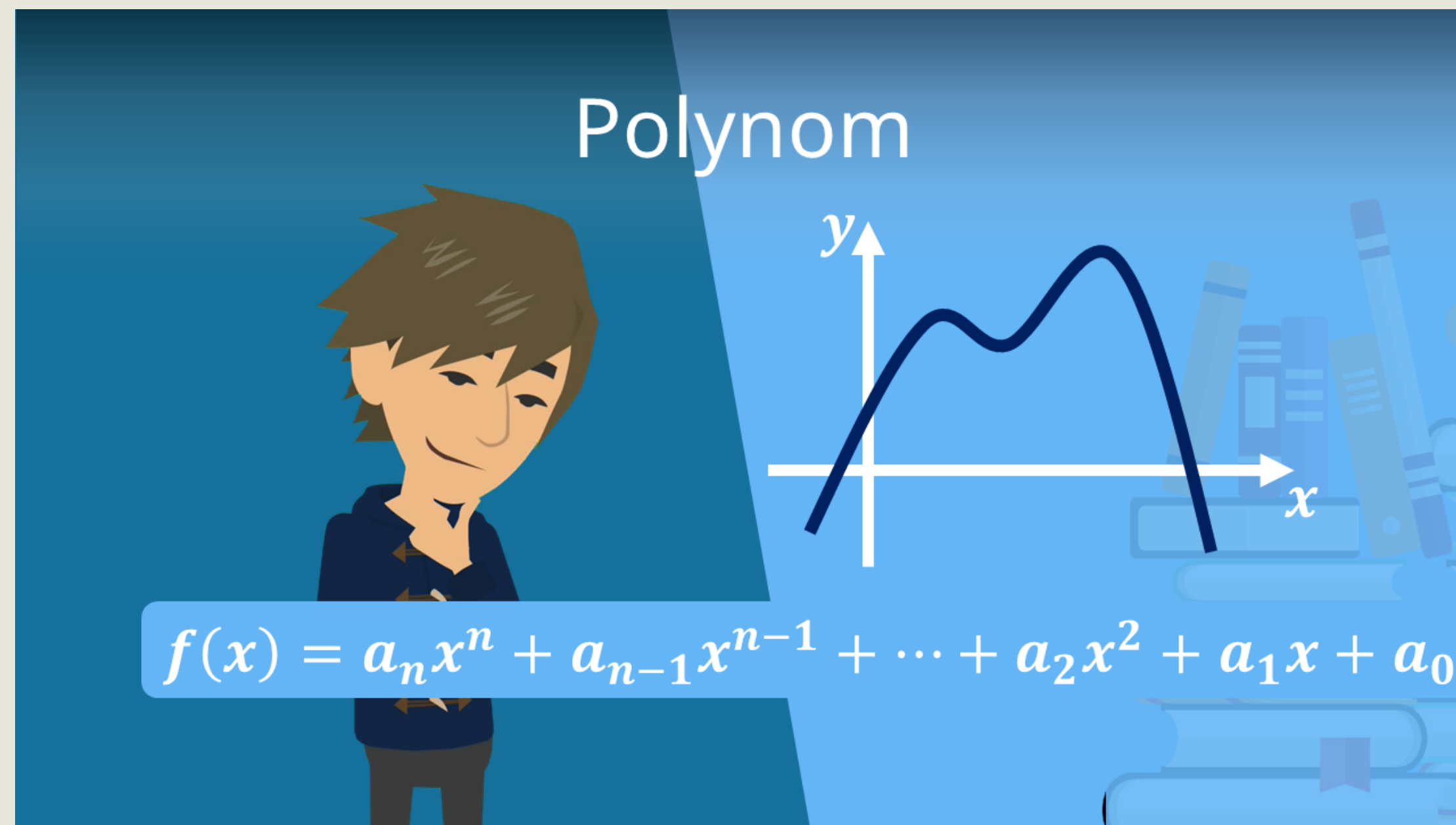
$$7x^3 + x^2 + 6x + 2$$

$$10x^5 + 3x^4 + 2x$$

Polynom-nom-nom-nomial



VERSCHIEDENE ARTEN VON POLYNOMEN



VERSCHIEDENE ARTEN VON POLYNOMEN

➤ **Monom** $x, x^2, 7a * x, -5a^4x^2$

VERSCHIEDENE ARTEN VON POLYNOMEN

➤ **Monom** $x, x^2, 7a * x, -5a^4x^2$

➤ **Binom** $a + b, x - \pi, x^2 + y^2, 3ab^5 - 4c^3, \frac{p^2}{2} - q$

VERSCHIEDENE ARTEN VON POLYNOMEN

➤ **Monom** $x, x^2, 7a * x, -5a^4x^2$

➤ **Binom** $a + b, x - \pi, x^2 + y^2, 3ab^5 - 4c^3, \frac{p^2}{2} - q$

➤ **Trinom** $3a^2 - 7ab^3 + 2ab^4$
 $a^2 + b^2 - c^2$

LISTE SPEZIELLER POLYNOME

- Alexander-Polynom (Knotentheorie)
 - Bell-Polynom
 - Bernoulli-Polynom
 - Bernstein-Polynom (Numerik)
 - Bernstein-Sato-Polynom
 - charakteristisches Polynom (Lineare Algebra)
 - chromatisches Polynom (Graphentheorie)
 - Ehrhart-Polynom
 - Eisenstein-Polynom (Algebra)
 - elementarsymmetrisches Polynom
 - Faber Polynom
 - Fibonacci-Polynom
 - Gegenbauer-Polynom (Analysis)
 - Hermitesches Polynom (Physik)
 - HOMFLY-Polynom (Knotentheorie)
 - homogenes Polynom
 - Hurwitz-Polynom
 - irreduzible Polynome (Algebra, Zahlentheorie)
 - Jacobi-Polynom
 - Jones-Polynom (Knotentheorie)
 - Kauffman-Polynom (Knotentheorie)
 - Kreisteilungspolynom (Algebra)
 - Lagrange-Polynom (Numerik)
 - Laguerre-Polynome
 - Legendre-Polynom
 - Minimalpolynom (Lineare Algebra, Algebra)
 - Monom
 - Newton-Polynom (Numerik)
 - orthogonale Polynome
 - Reziprokes Polynom (Algebra)
 - Schur-Polynom
 - symmetrisches Polynom
 - Taylor-Polynom (Analysis)
 - Touchard-Polynom
 - trigonometrisches Polynom (Analysis)
 - Tschebischeff-Polynom
 - Tutte-Polynom (Matroidtheorie)
 - Wilkinson-Polynom
 - Zernike-Polynom (Geometrische Optik)
-

UNIVARIATE

➤ **Ausdruck, Gleichung, Funktion oder Polynom**

UNIVARIATE

- **Ausdruck, Gleichung, Funktion oder Polynom**
- **Nur eine Variable**

UNIVARIATE

- **Ausdruck, Gleichung, Funktion oder Polynom**
- **Nur eine Variable**

$$\textit{Univariat} : f(x) = 5x + \sin(x)$$

$$\textit{Bivariat} : f(x, y) = 3x^2 + y + y^3$$

$$\textit{Multivariat} : f(x, y, z) = y^2 + z - x^2$$

WAS SIND NULLSTELLEN DER POLYNOME

WAS SIND NULLSTELLEN DER POLYNOME

➤ **Alle Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$**

WAS SIND NULLSTELLEN DER POLYNOME

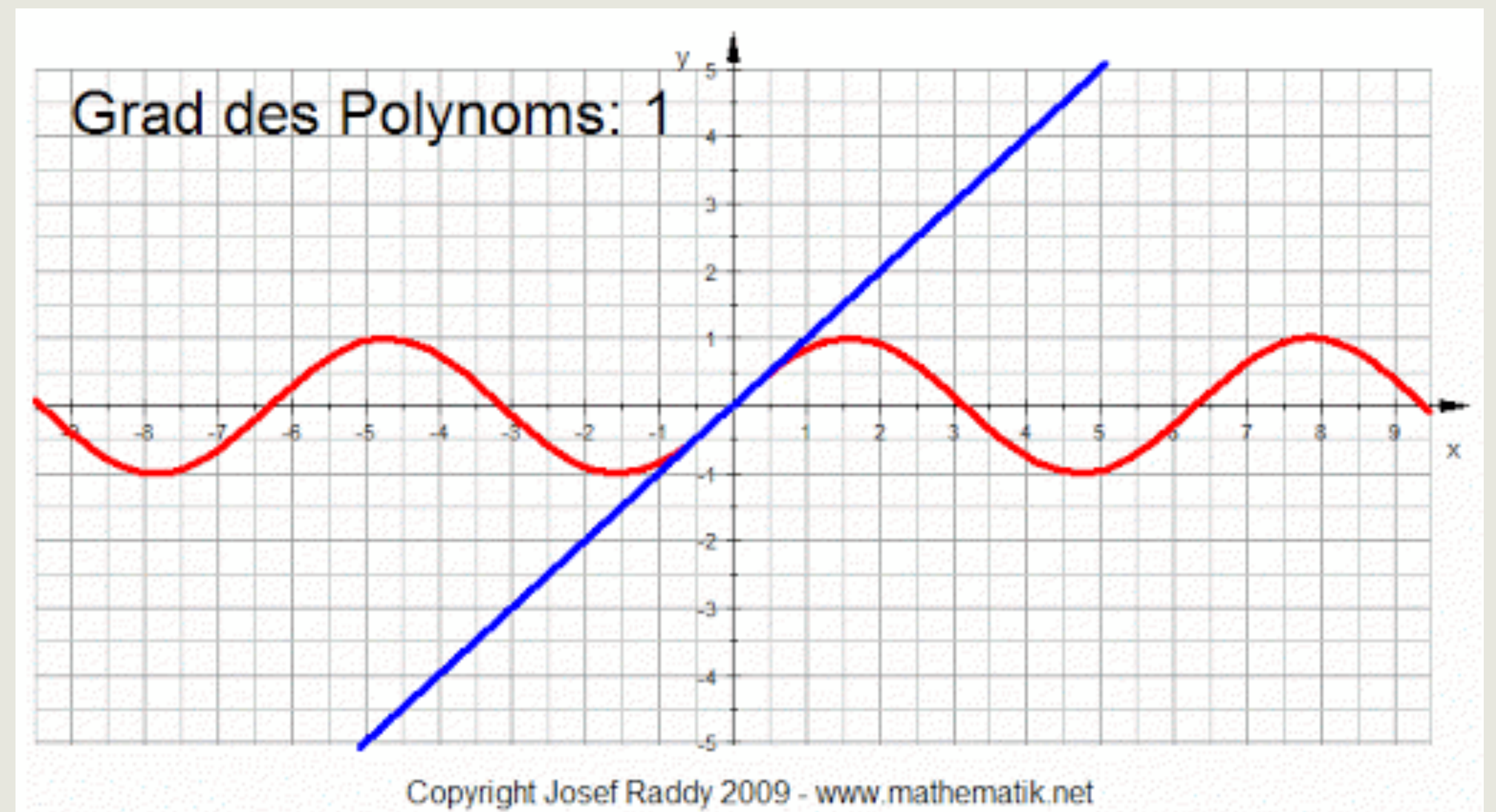
- **Alle Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$**
- **Rechnerisch durch Anwendung der Umformungsregeln etc.**

WAS SIND NULLSTELLEN DER POLYNOME

- **Alle Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$**
 - **Rechnerisch durch Anwendung der Umformungsregeln etc.**
 - **Näherungsweise grafisch**
-

WAS SIND NULLSTELLEN DER POLYNOME

- Alle Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$
- Rechnerisch durch Anwendung der
- Näherungsweise grafisch



BERECHNUNG VON NULLSTELLEN

➤ Polynom f normieren

$$f(a) = 0 \iff \frac{f(a)}{a_n} = 0$$

BERECHNUNG VON NULLSTELLEN

➤ Polynom f normieren

➤ Leitkoeffizient a_n

$$f(a) = 0 \iff \frac{f(a)}{a_n} = 0$$

BERECHNUNG VON NULLSTELLEN

➤ Polynom f normieren

➤ Leitkoeffizient a_n

➤ Nullstellen bleiben gleich

$$f(a) = 0 \iff \frac{f(a)}{a_n} = 0$$

POLYNOME VOM GRAD 0

➤ $f(x) = 0 \forall x$

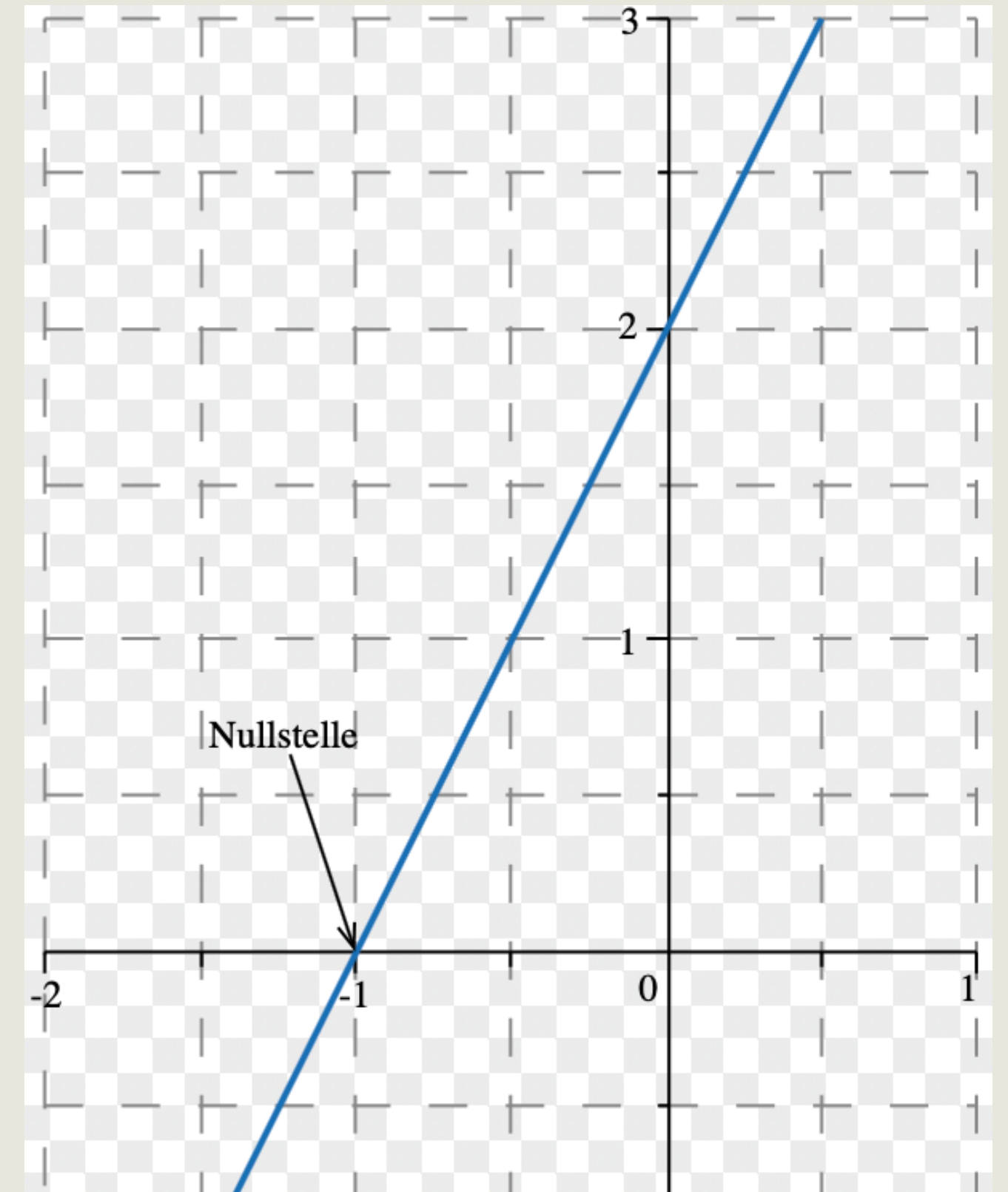
POLYNOME VOM GRAD 0

➤ $f(x) = 0 \forall x$

➤ ***Unendlich viele Nullstellen***

POLYNOME VOM GRAD 1

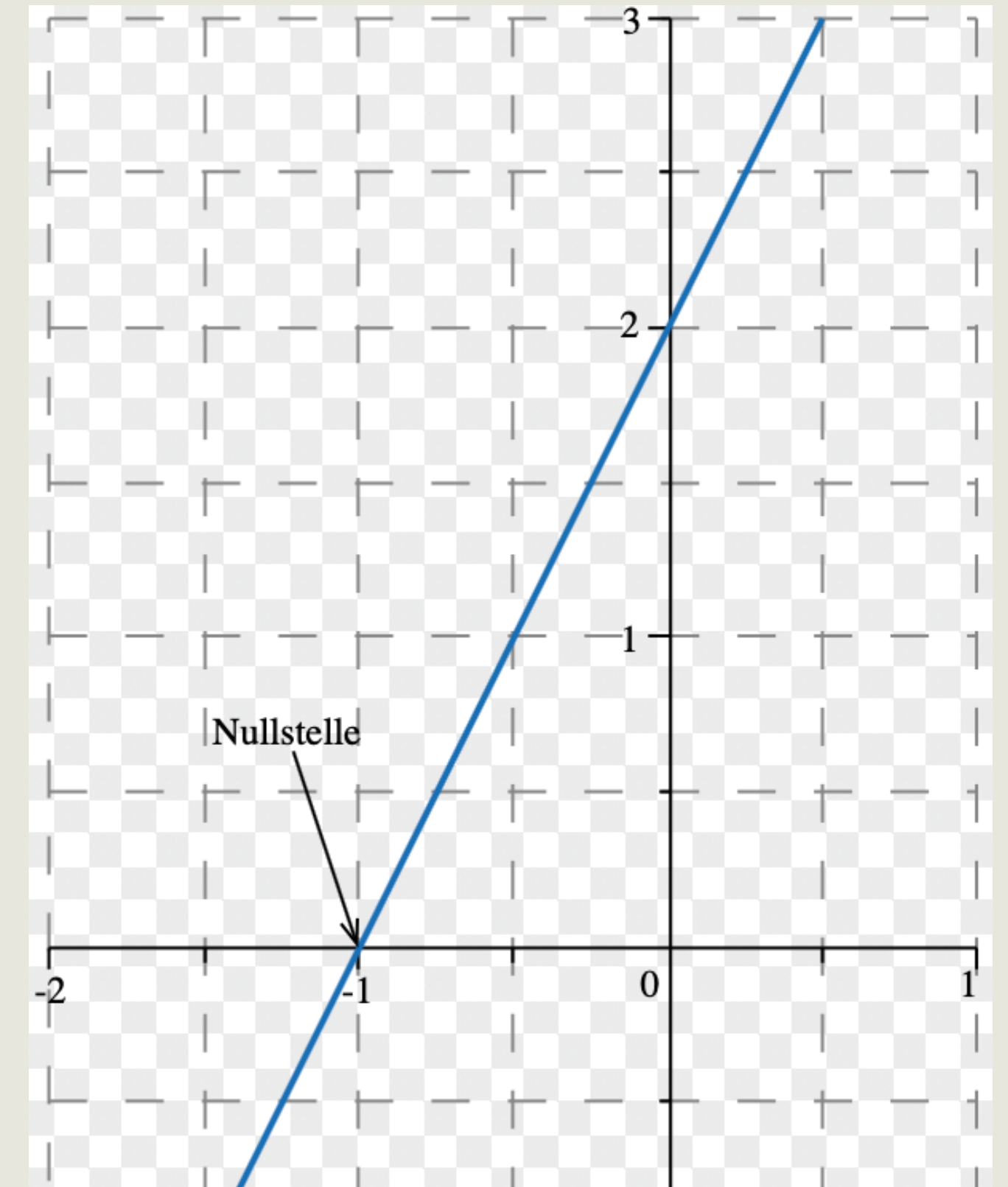
➤ $f(x) = x + a$



POLYNOME VOM GRAD 1

➤ $f(x) = x + a$

➤ $f(x) = 0$

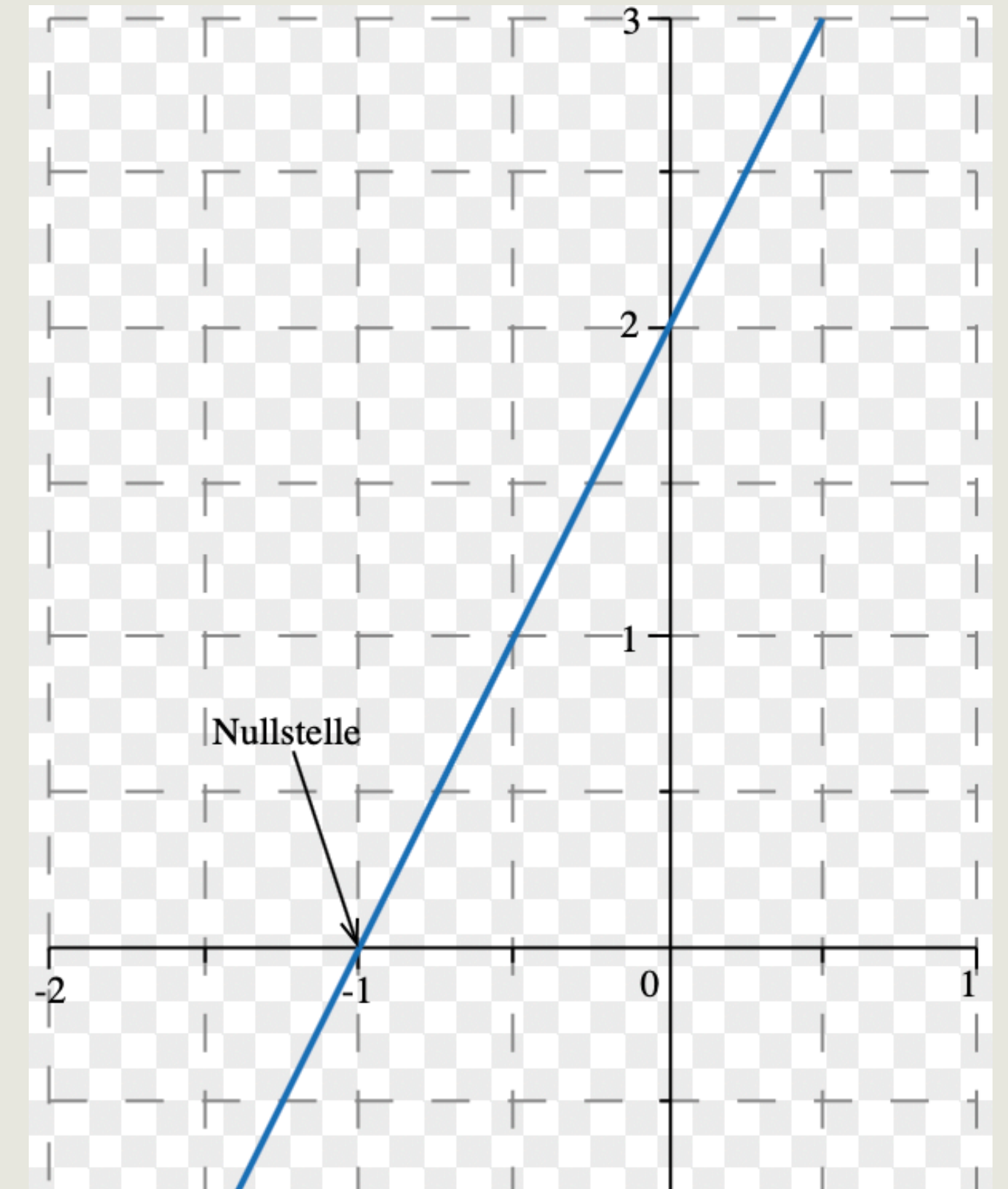


POLYNOME VOM GRAD 1

➤ $f(x) = x + a$

➤ $f(x) = 0$

➤ $X = -a$



POLYNOME VOM GRAD 2

➤ $f(x) = x^2 + px + q, p, q \in \mathbb{R}$

$$x^2 + px + q = 0 \mid -q$$

$$\Leftrightarrow x^2 + px = -q \mid + \frac{p^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} - q \mid (a^2 + 2ab + b^2) = (a + b)^2$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q$$

POLYNOME VOM GRAD 2

➤ $f(x) = x^2 + px + q, p, q \in \mathbb{R}$

➤ $\frac{p^2}{4} - q \geq 0$

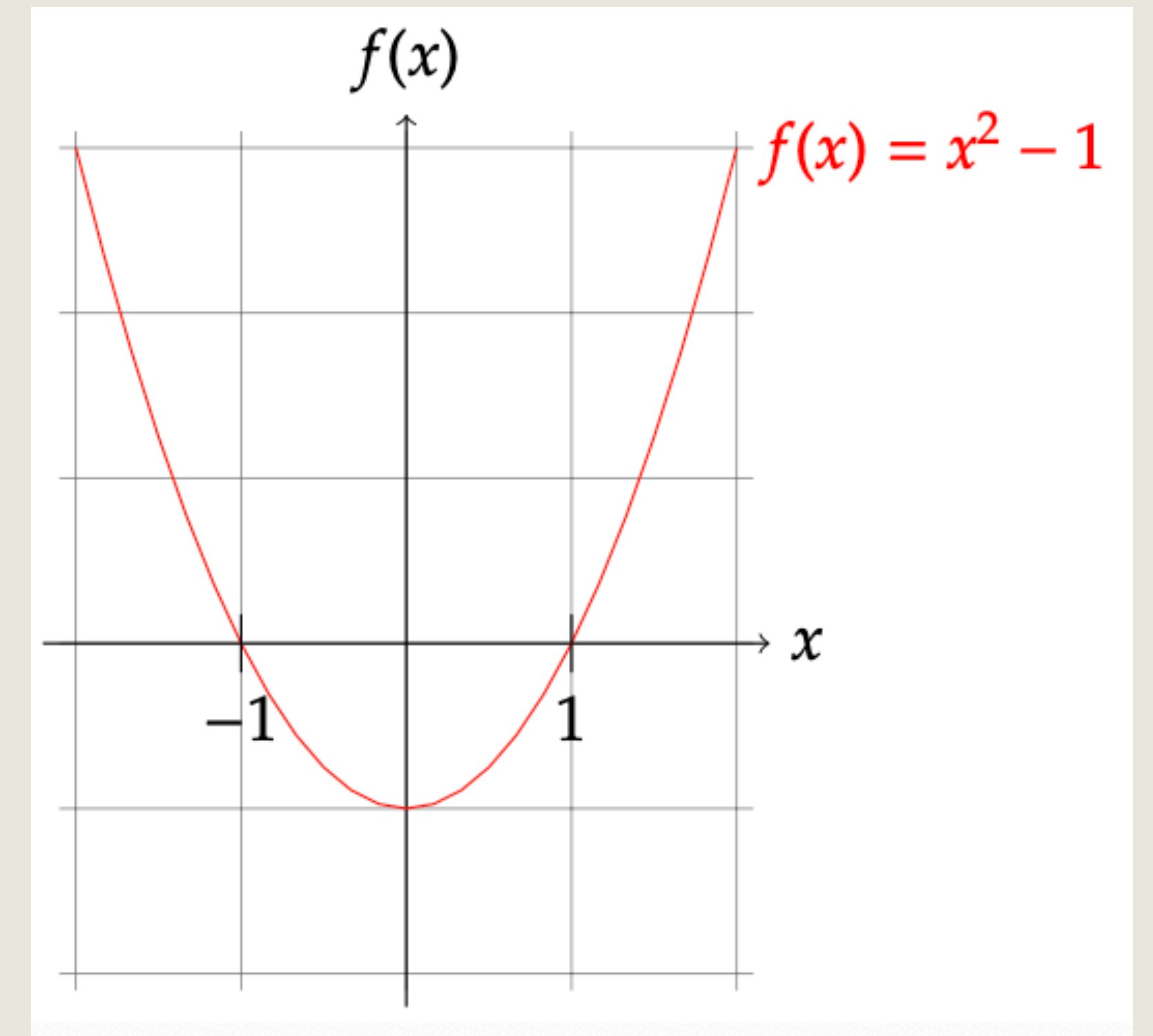
$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q \mid \sqrt{\quad}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \mid -\frac{p}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

POLYNOME VOM GRAD 2

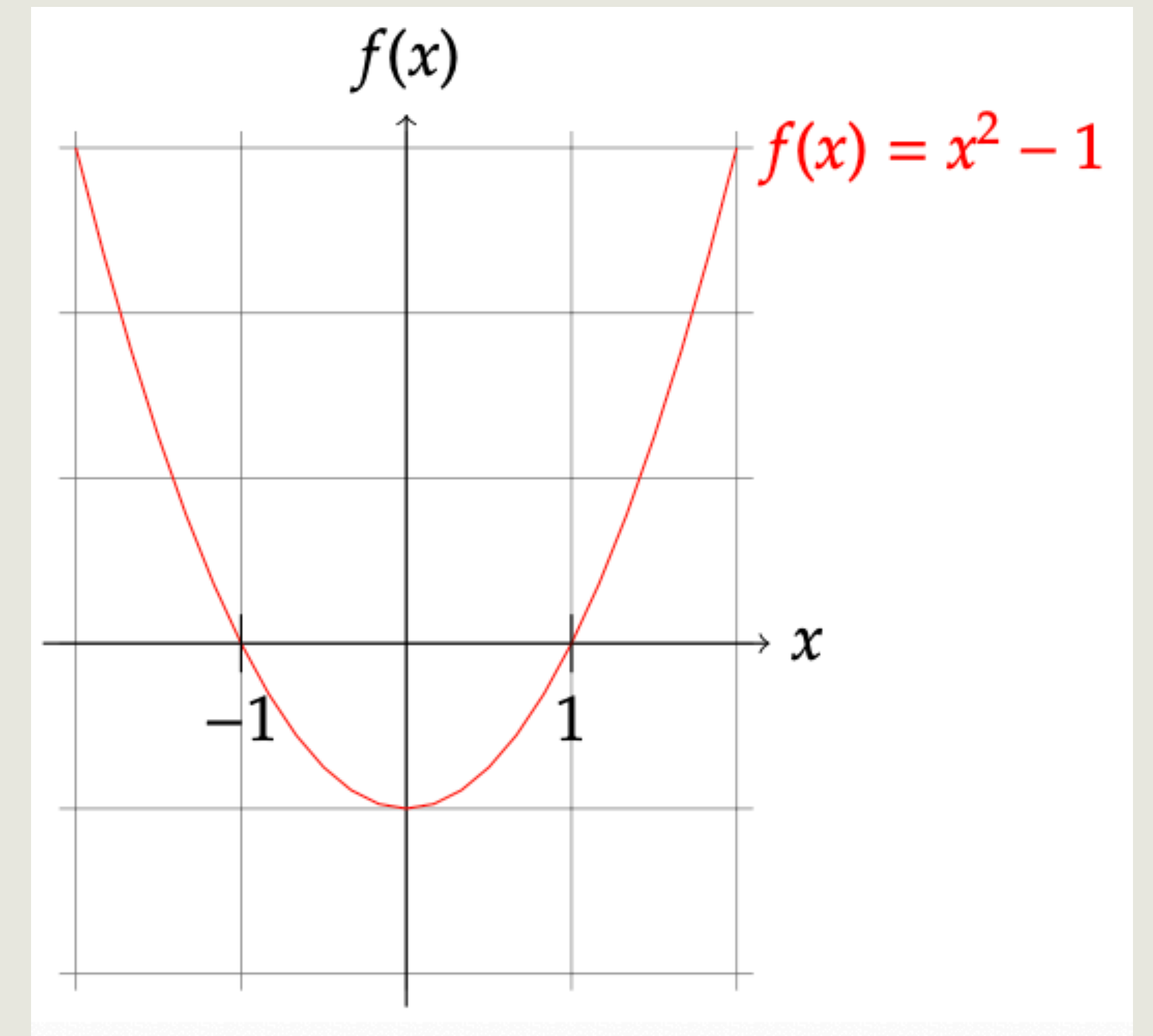
➤ $p^2/4 - q > 0$



POLYNOME VOM GRAD 2

➤ $p^2/4 - q > 0$

➤ $p^2/4 - q < 0$

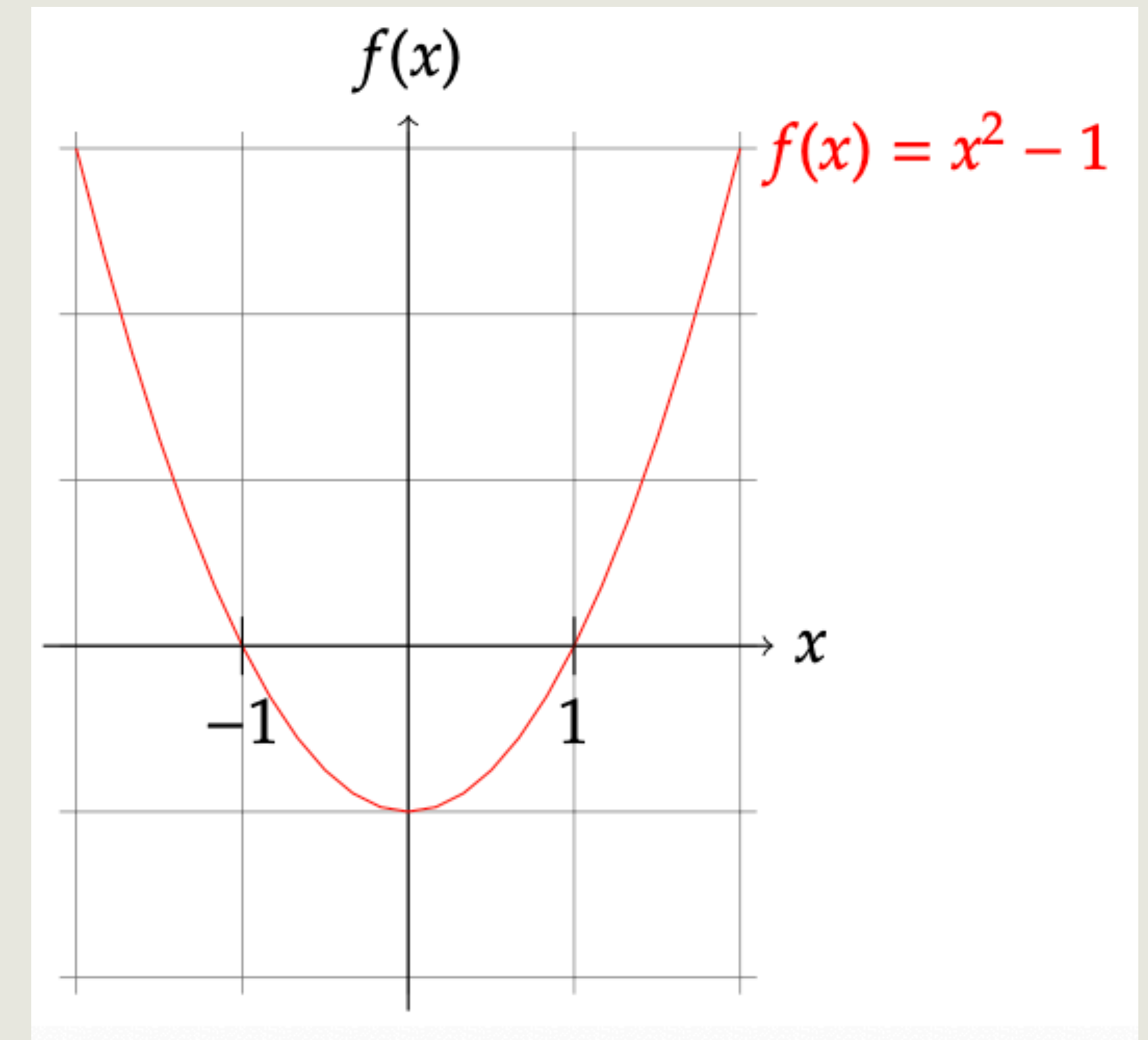


POLYNOME VOM GRAD 2

➤ $p^2/4 - q > 0$

➤ $p^2/4 - q < 0$

➤ $p^2/4 - q = 0$



POLYNOME VOM GRAD 2

➤ **Beispiel:** $f(x) = x^2 + x - 6$

➤ **Lösung:** $x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 2$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -3$$

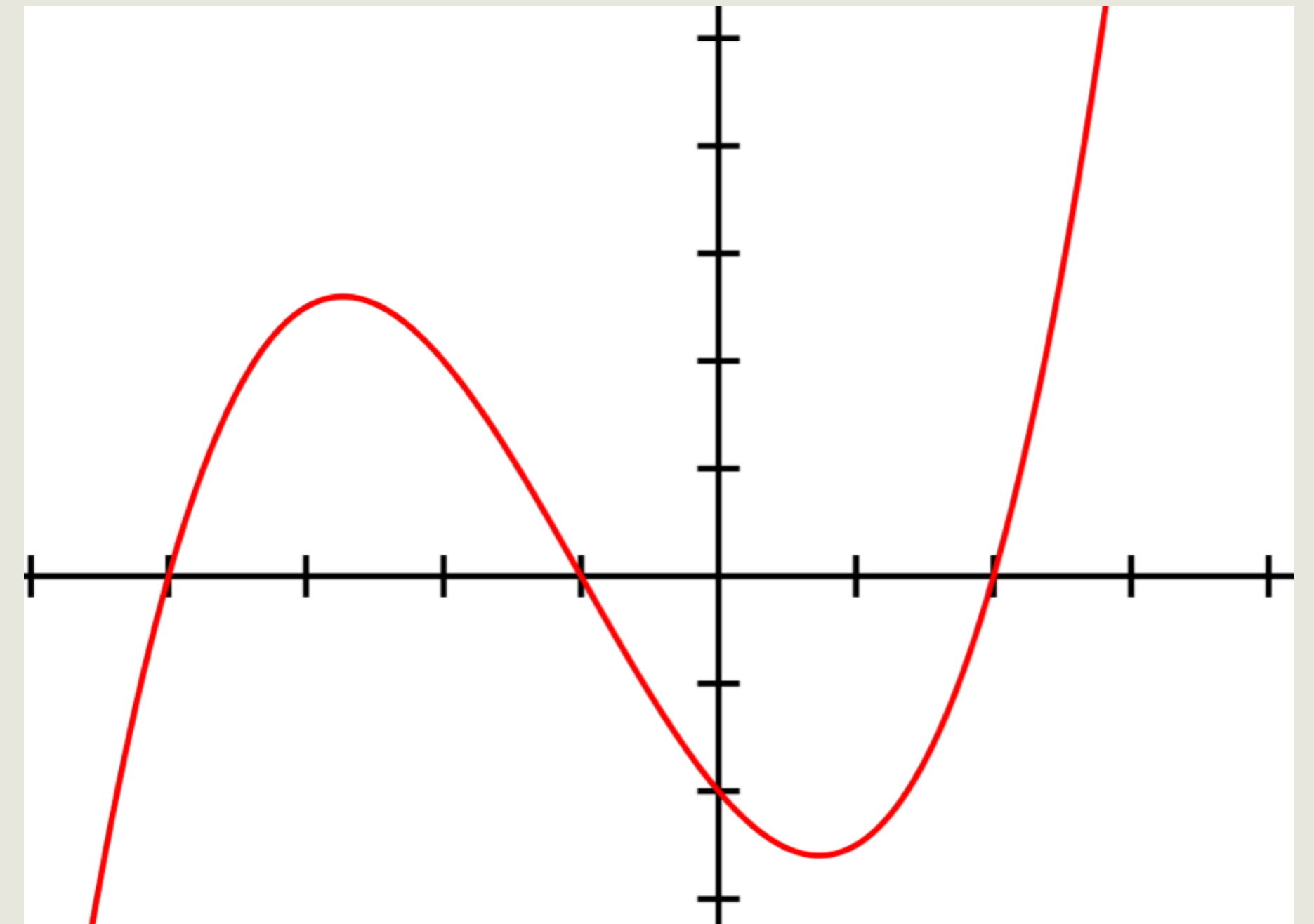
POLYNOME VOM GRAD 2

➤ **Mitternachtsformel:** $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$\Delta = b^2 - 4ac \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

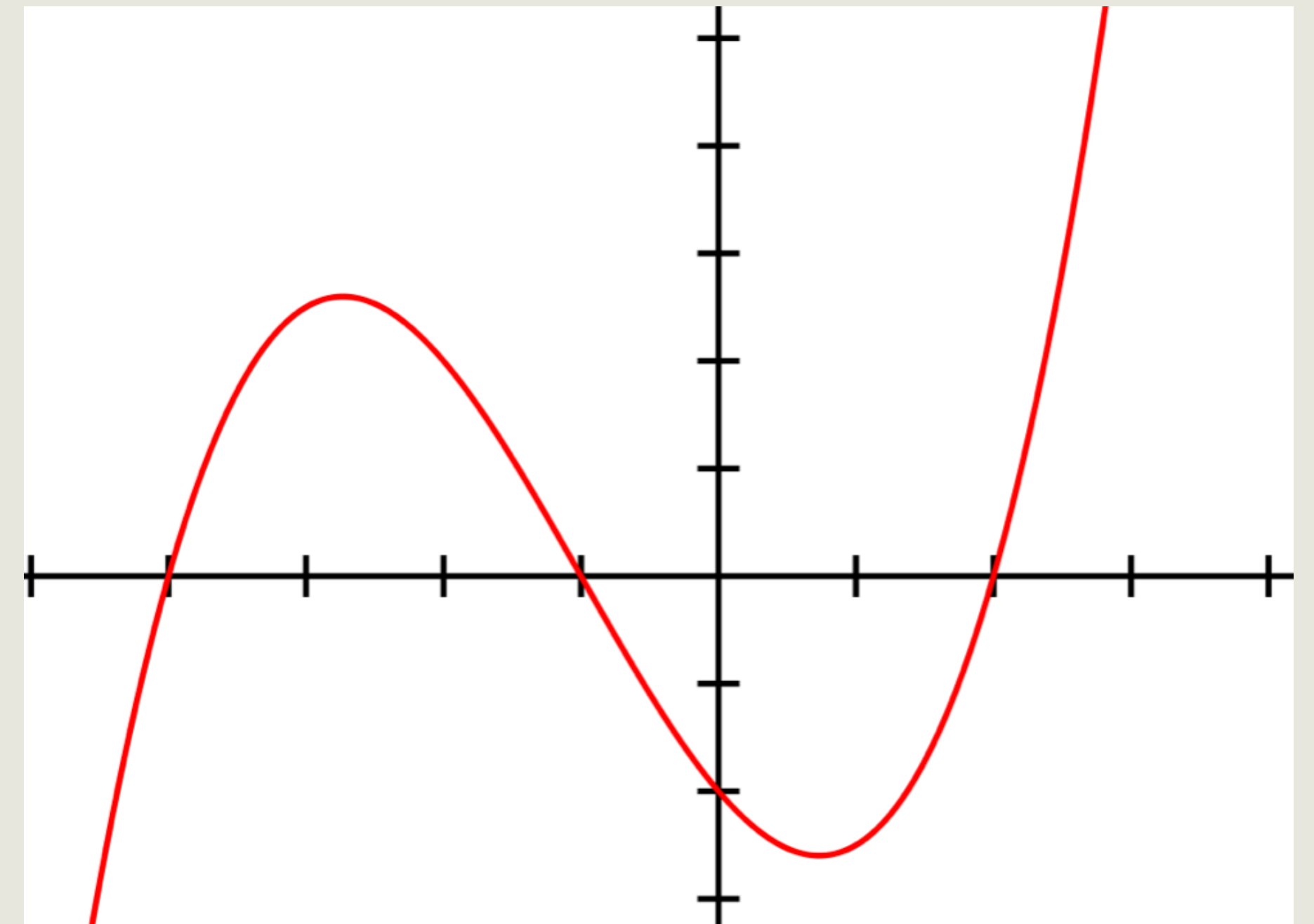
POLYNOME VOM GRAD 3

➤ **Kompliziertere Formeln**



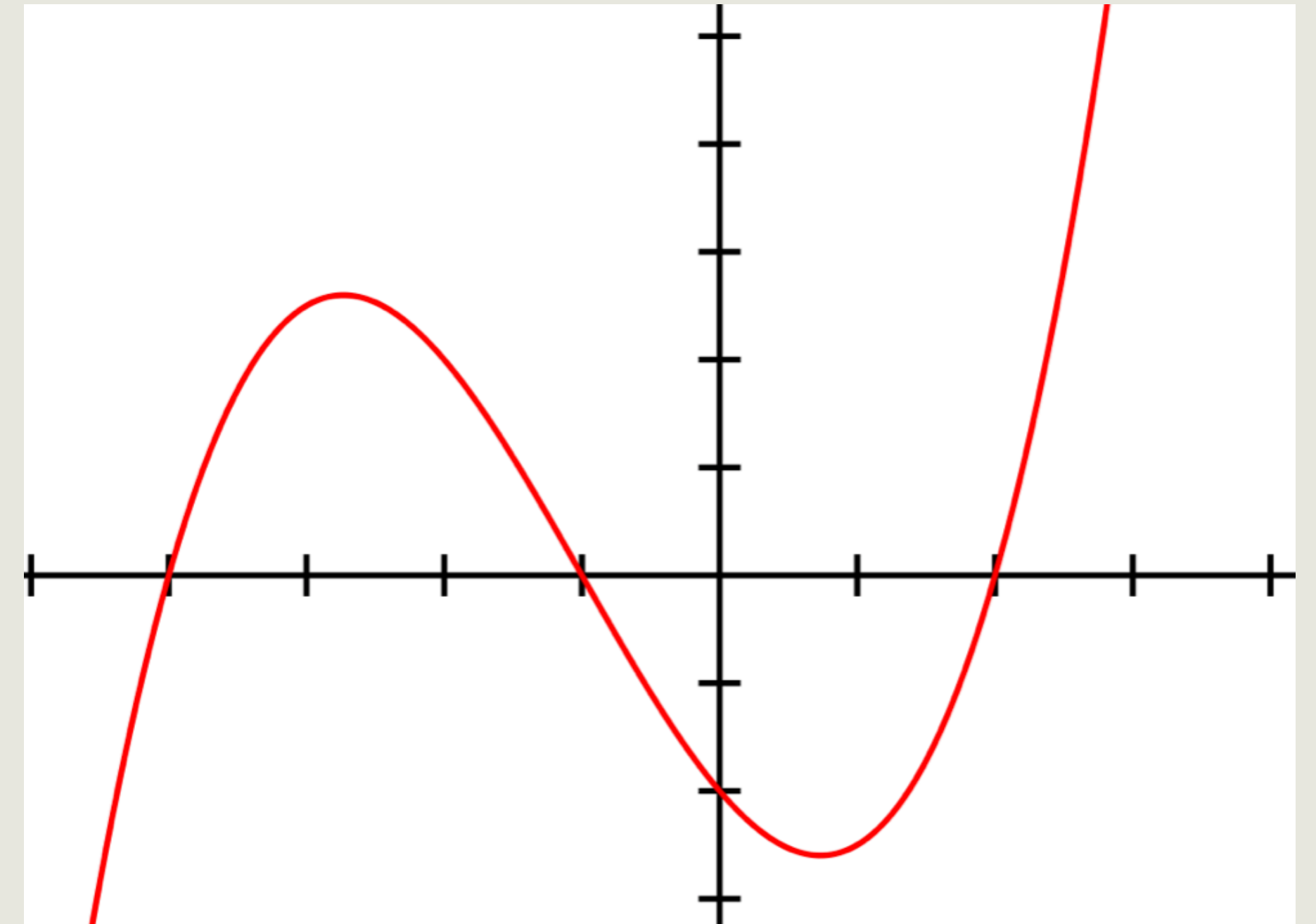
POLYNOME VOM GRAD 3

➤ **Kompliziertere Formeln**



POLYNOME VOM GRAD 3

- **Kompliziertere Formeln**
- **Tipps und Tricks**



POLYNOME VOM GRAD 3

➤ **Beispiel:** $f(x) = x^3 + 4x^2 - 51x - 54$

POLYNOME VOM GRAD 3

➤ **Beispiel:** $f(x) = x^3 + 4x^2 - 51x - 54$

➤ **Zuerst:** $(x^3 + 4x^2 - 51x - 54) \div (x + 1) =$

POLYNOME VOM GRAD 3

➤ **Beispiel:** $f(x) = x^3 + 4x^2 - 51x - 54$

➤ **Zuerst:** $(x^3 + 4x^2 - 51x - 54) \div (x + 1) =$

$$\begin{array}{r} x^3 + 4x^2 - 51x - 54 \\ - x^3 \quad - x^2 \\ \hline 3x^2 - 51x \\ - 3x^2 \quad - 3x \\ \hline - 54x - 54 \\ 54x + 54 \\ \hline 0 \end{array}$$

POLYNOME VOM GRAD 3

➤ **Gewünschtes Polynom $g(x)$:**

$$g(x) = x^2 + 3x - 54$$

➤ **Gewünschtes Polynom $f(x)$:**

$$f(x) = (x + 1)(x^2 + 3x - 54)$$

POLYNOME VOM GRAD 4

➤ **Polynom $f(x)$:**

$$f(x) = x^4 + ax^2 + a$$

POLYNOME VOM GRAD 4

➤ **Polynom $f(x)$:**

$$f(x) = x^4 + ax^2 + a$$

➤ **Substitution:**

$$y = x^2$$

$$g(y) = y^2 + ay + a$$

POLYNOME VOM GRAD 4

➤ **Lösungen für $g(y)$:**

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{y_1}$$

$$x_{3,4} = \pm \sqrt{y_2}$$

POLYNOME VOM GRAD 4

➤ **Lösungen für $g(y)$:**

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{y_1}$$

$$x_{3,4} = \pm \sqrt{y_2}$$

➤ **Nullstellen von $f(x)$**

POLYNOME VOM GRAD 4

➤ **Beispiel:**

$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 6$$

POLYNOME VOM GRAD 4

➤ **Beispiel:**

$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 6$$

➤ **Substitution:**

$$x^2 = y$$

$$g(y) = y^2 - 5y + 6$$

POLYNOME VOM GRAD 4

➤ **Beispiel:**

$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 6$$

➤ **Substitution:**

$$x^2 = y$$

$$g(y) = y^2 - 5y + 6$$

$$\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}$$

BERECHNUNG VON NULLSTELLEN DES POLYNOMEN 5. GRADES UND HÖHER.

BERECHNUNG VON NULLSTELLEN DES POLYNOMEN 5. GRADES UND HÖHER.

➤ **Quintische Gleichung**

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$$

BERECHNUNG VON NULLSTELLEN DES POLYNOMEN 5. GRADES UND HÖHER.

➤ **Quintische Gleichung**

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$$

➤ **Sextische Funktion** ($n = 6$)

BERECHNUNG VON NULLSTELLEN DES POLYNOMEN 5. GRADES UND HÖHER.

➤ **Quintische Gleichung**

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$$

➤ **Sextische Funktion** ($n = 6$)

➤ **Septische Funktion** ($n = 7$)

BERECHNUNG VON NULLSTELLEN DES POLYNOMEN 5. GRADES UND HÖHER.

➤ **Quintische Gleichung**

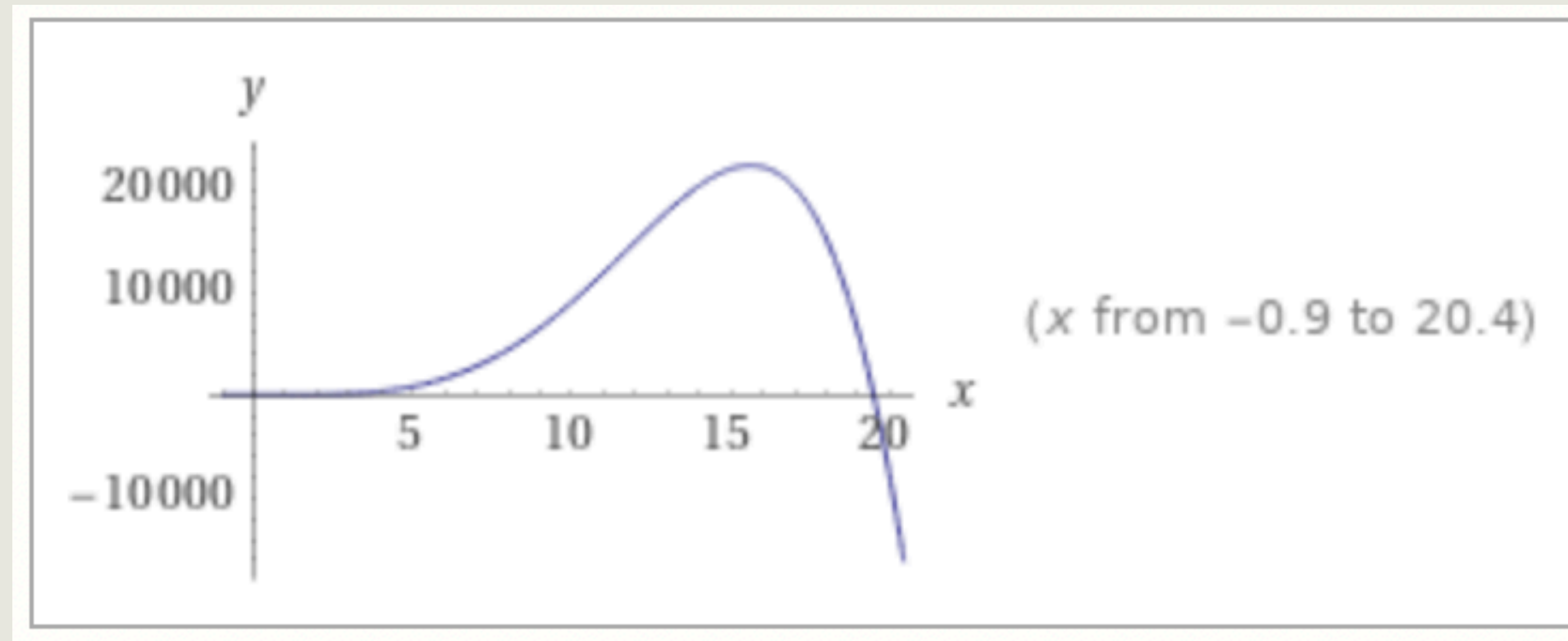
$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$$

➤ **Sextische Funktion** ($n = 6$)

➤ **Septische Funktion** ($n = 7$)

➤ **Octische Funktion** ($n = 8$)

BERECHNUNG VON NULLSTELLEN DES POLYNOMEN 5. GRADES UND HÖHER.

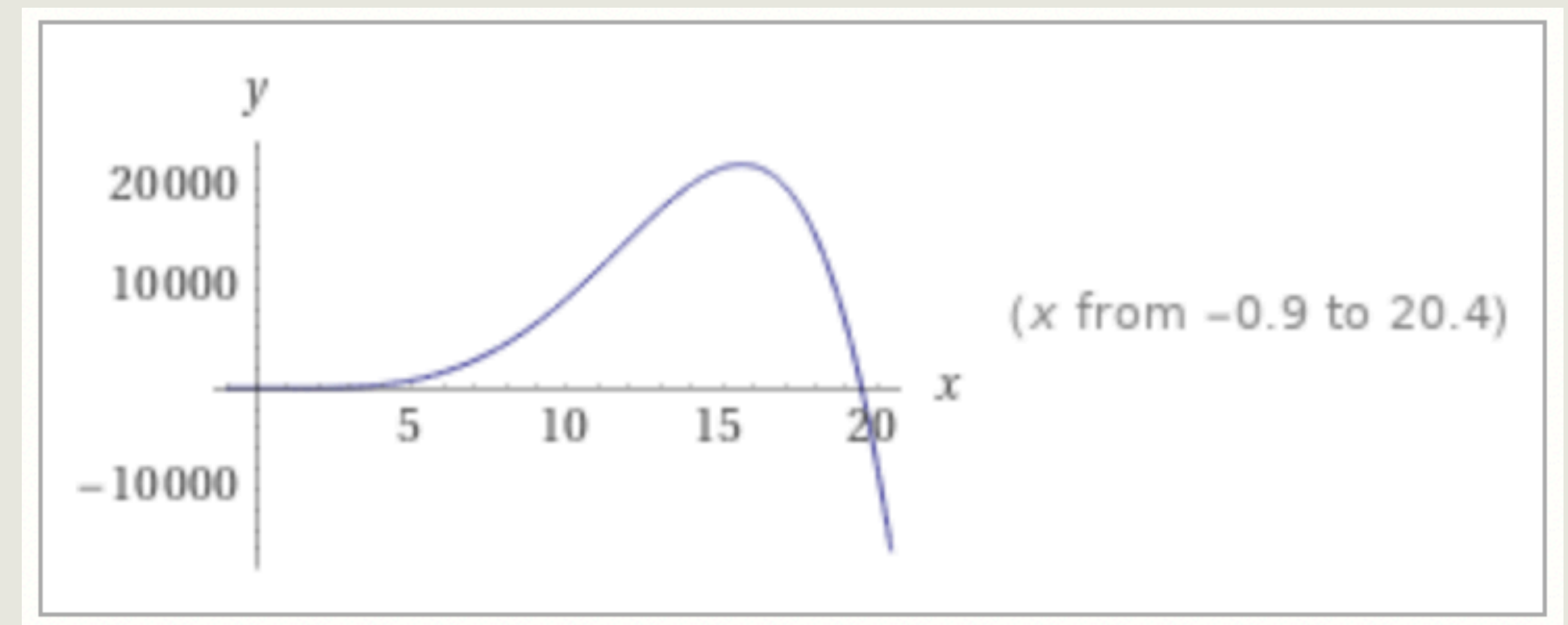


BERECHNUNG VON NULLSTELLEN DES POLYNOMEN 5. GRADES UND HÖHER.

$$f(x) = -0.1x^5 + 2x^4 - x^3 + 1$$

$$f'(x) = -0.5x^4 + 8x - 3x^2$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



BERECHNUNG VON NULLSTELLEN DES POLYNOMEN 5. GRADES UND HÖHER.

TABELLENANSATZ FÜR STARTWERT

X	0	1	2	3	4	...	18	19	20
Y	1	1.9	21.8	111.6	346.6	...	15614.1	6174	-7999

SCHWIERIGKEITEN

➤ **Fall 1:** $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 1$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$

$$f'(1) = 3 * 1^2 - 6 * 1 + 3 = 0$$

X	-1	1
$f(x)$	-6	2

SCHWIERIGKEITEN

➤ **Fall 2:** $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 3$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$$

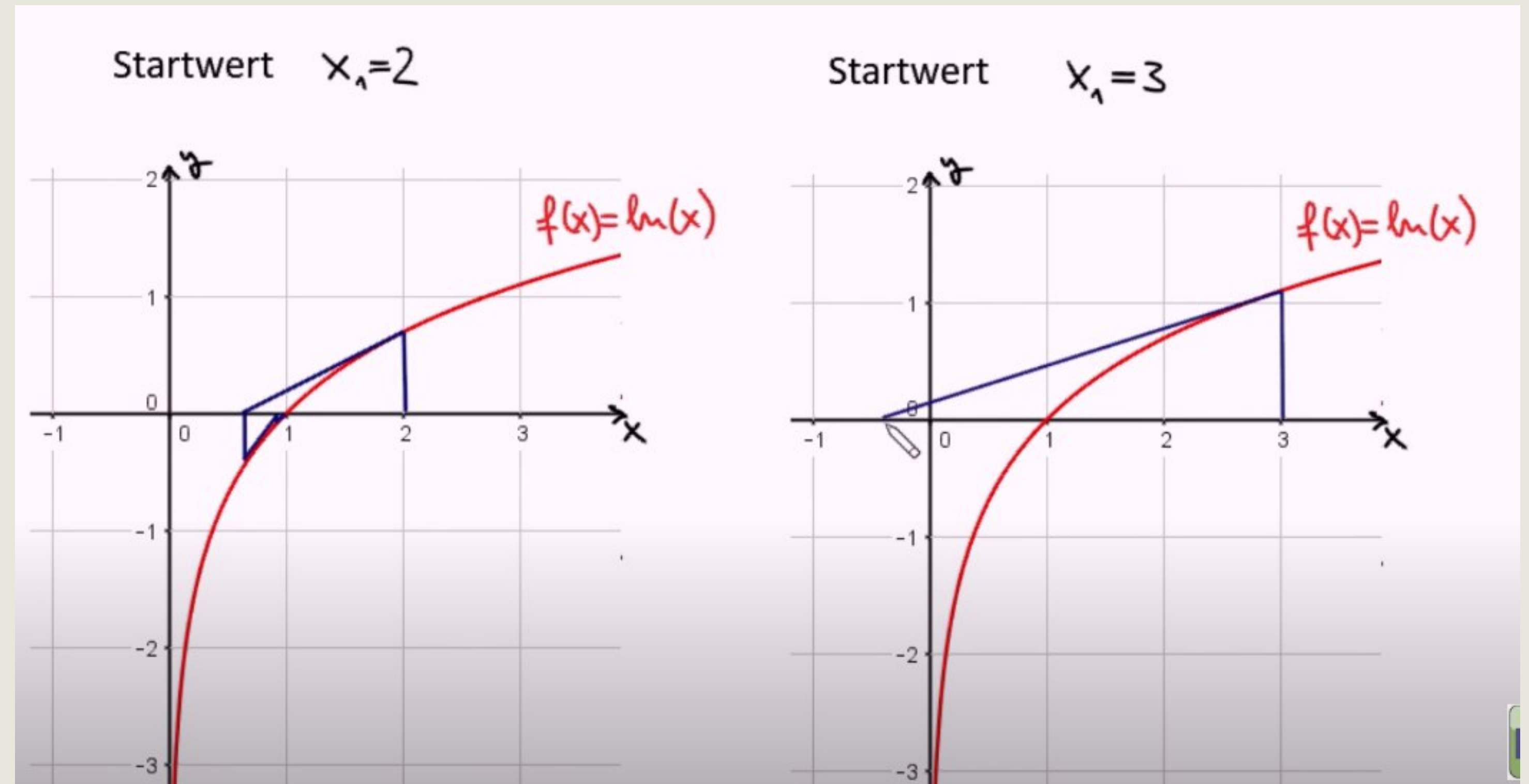
$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \div f'(x_n)$$

X	-1	1
$f(x)$	-2	2

SCHWIERIGKEITEN

➤ **Fall 3:** $f(x) = \ln(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$



**DANKE FÜR IHRE
AUFMERKSAMKEIT!**
