Einführung in projektive Ebenen

Florian Feik, Markus Innerlohinger

Wissenschaftliche Arbeitstechniken und Präsentation

26.01.2018

Inhalt des Vortrags

Inzidenzebene

Eine Inzidenzebene besteht aus einem Mengenpaar (P,G):

Inzidenzebene

Eine Inzidenzebene besteht aus einem Mengenpaar (P,G):

- Sei P eine Menge von Punkten.

Inzidenzebene

Eine Inzidenzebene besteht aus einem Mengenpaar (P,G):

- Sei P eine Menge von Punkten.
- Sei G eine Menge von Geraden, bestehend aus einer Teilmenge der Potenzmenge von P.

Inzidenzebene

Eine Inzidenzebene besteht aus einem Mengenpaar (P,G):

- Sei P eine Menge von Punkten.
- Sei G eine Menge von Geraden, bestehend aus einer Teilmenge der Potenzmenge von P.

Das Paar (P,G) heißt Inzidenzebene, wenn die folgenden drei Inzidenzaxiome erfüllt sind:

Inzidenzebene

Eine Inzidenzebene besteht aus einem Mengenpaar (P,G):

- Sei P eine Menge von Punkten.
- Sei G eine Menge von Geraden, bestehend aus einer Teilmenge der Potenzmenge von P.

Das Paar (P,G) heißt Inzidenzebene, wenn die folgenden drei Inzidenzaxiome erfüllt sind:

1. Durch zwei verschiedene Punkte $A \neq B \in P$ existiert genau eine Gerade in G.
   Diese Gerade heißt Verbindungsgerade von A und B.

Inzidenzebene

Eine Inzidenzebene besteht aus einem Mengenpaar (P,G):

- Sei P eine Menge von Punkten.
- Sei G eine Menge von Geraden, bestehend aus einer Teilmenge der Potenzmenge von P.

Das Paar (P,G) heißt Inzidenzebene, wenn die folgenden drei Inzidenzaxiome erfüllt sind:

1. Durch zwei verschiedene Punkte $A \neq B \in P$ existiert genau eine Gerade in G.
   Diese Gerade heißt Verbindungsgerade von A und B.
2. Auf jeder Gerade liegen mindestens zwei Punkte.

Inzidenzebene

Eine Inzidenzebene besteht aus einem Mengenpaar (P,G):

- Sei P eine Menge von Punkten.
- Sei G eine Menge von Geraden, bestehend aus einer Teilmenge der Potenzmenge von P.

Das Paar (P,G) heißt Inzidenzebene, wenn die folgenden drei Inzidenzaxiome erfüllt sind:

1. Durch zwei verschiedene Punkte $A \neq B \in P$ existiert genau eine Gerade in G.
   Diese Gerade heißt Verbindungsgerade von A und B.
2. Auf jeder Gerade liegen mindestens zwei Punkte.
3. Es gibt drei Punkte in allgemeiner Lage.

Inzidenzebene Beispiel

- Punkte:

Inzidenzebene Beispiel

- Punkte: $\mathrm{P} = \{A, B, C\}$

Inzidenzebene Beispiel

- Punkte: $\mathsf{P} = \{A, B, C\}$
- Geraden: $\mathsf{G} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{P})$
  $\mathcal{P}(\mathsf{P}) = \{\emptyset, \{A\}, \{B\}, \{C\}, \{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}, \{A, B, C\}\}$

Inzidenzebene Beispiel

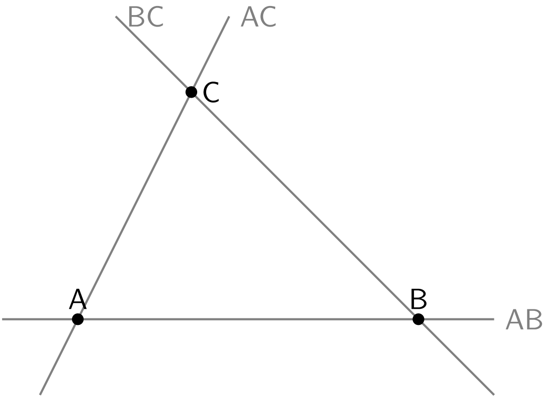
- Punkte: $\mathsf{P} = \{A, B, C\}$
- Geraden: $\mathsf{G} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{P})$
  $\mathcal{P}(\mathsf{P}) = \{\emptyset, \{A\}, \{B\}, \{C\}, \{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}, \cancel{\{A, B, C\}}\}$

Inzidenzebene Beispiel

- Punkte: $\mathsf{P} = \{A, B, C\}$
- Geraden: $\mathsf{G} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{P})$
  $\mathcal{P}(\mathsf{P}) = \{\cancel{\emptyset, \{A\}, \{B\}, \{C\}}, \{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}, \cancel{\{A, B, C\}}\}$

Inzidenzebene Beispiel

- Punkte: $\mathsf{P} = \{A, B, C\}$
- Geraden: $\mathsf{G} \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{P})$
  $\mathsf{G} = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}\}$



Affine Ebene

Parallelität

- Zwei verschiedene Geraden heißen parallel, wenn sie übereinstimmen, oder keinen gemeinsamen Schnittpunkt haben.
- $g \parallel h \Leftrightarrow (g = h) \vee g \cap h = \emptyset$

Parallelität

- Zwei verschiedene Geraden heißen parallel, wenn sie übereinstimmen, oder keinen gemeinsamen Schnittpunkt haben.
- $g \parallel h \Leftrightarrow (g = h) \vee g \cap h = \emptyset$
- Zwei nicht parallele Geraden haben genau einen Schnittpunkt.

Affine Ebene

Parallelität

- Zwei verschiedene Geraden heißen parallel, wenn sie übereinstimmen, oder keinen gemeinsamen Schnittpunkt haben.
- $g \parallel h \Leftrightarrow (g = h) \vee g \cap h = \emptyset$
- Zwei nicht parallele Geraden haben genau einen Schnittpunkt.

Parallelenaxiom

Zu jedem Punkt A und zu jeder Geraden g gibt es genau eine Gerade h, sodass $g \parallel h$ und $A \in h$ ist.

Affine Ebene

Affine Ebene

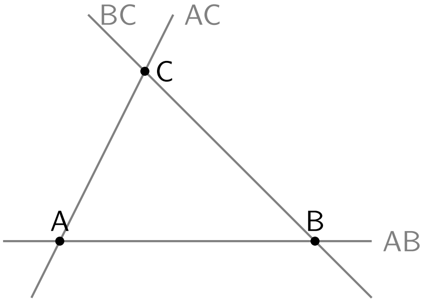
Eine Inzidenzebene, in der das Parallelenaxiom gilt, ist eine affine Ebene.

Affine Ebene

Affine Ebene

Eine Inzidenzebene, in der das Parallelenaxiom gilt, ist eine affine Ebene.

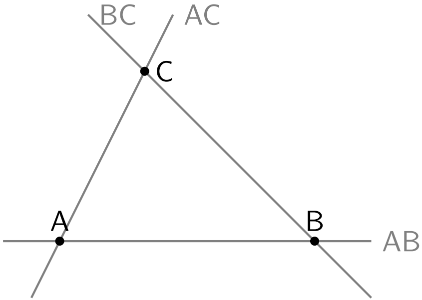
- (P,G)=$(\{A, B, C\}, \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}\})$



Affine Ebene

Eine Inzidenzebene, in der das Parallelenaxiom gilt, ist eine affine Ebene.

- $\cancel{(\mathrm{P},\mathrm{G})=(\{A,B,C\},\{\{A,B\},\{A,C\},\{B,C\}\})}$

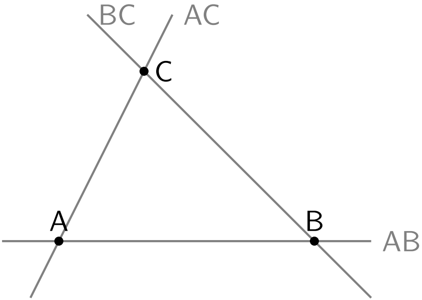


Affine Ebene

Affine Ebene

Eine Inzidenzebene, in der das Parallelenaxiom gilt, ist eine affine Ebene.

- ~~(P,G)=($\{A, B, C\}, \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}\}$)~~
- (P,G)=({A,B,C,D},{{A,B},{A,C},{A,D},{B,C},{B,D},{C,D}})

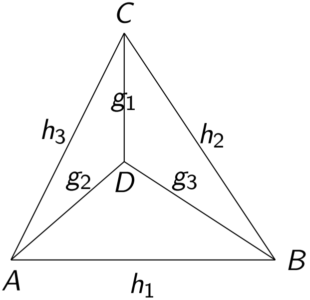


Minimale affine Ebene

- (P,G)=({A,B,C,D},{{A,B},{A,C},{A,D},{B,C},{B,D},{C,D}})

Minimale affine Ebene

- (P,G)=({A,B,C,D},{{A,B},{A,C},{A,D},{B,C},{B,D},{C,D}})



Konstruktion der projektiven Ebene

- $g_1, g_2 \in A^2(\mathbb{R}), g_1 \neq g_2$
- Fall 1: $g_1 \cap g_2 = \{P\}$
  oder
  Fall 2: $g_1 \cap g_2 = \emptyset$

Konstruktion der projektiven Ebene

- $g_1, g_2 \in A^2(\mathbb{R}), g_1 \neq g_2$
- Fall 1: $g_1 \cap g_2 = \{P\}$
  oder
  Fall 2: $g_1 \cap g_2 = \emptyset$
- Hinzufügen von **unendlich-fernen Punkten** in allen Richtungen.

Konstruktion der projektiven Ebene

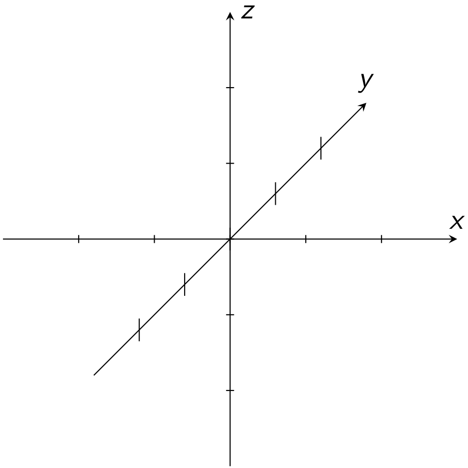
- $g_1, g_2 \in A^2(\mathbb{R}), g_1 \neq g_2$
- Fall 1: $g_1 \cap g_2 = \{P\}$
  oder
  Fall 2: $g_1 \cap g_2 = \emptyset$
- Hinzufügen von **unendlich-fernen Punkten** in allen Richtungen.
- Die **unendlich-ferne Gerade** ist die Menge aller unendlich-fernen Punkten.

Konstruktion der projektiven Ebene

- $g_1, g_2 \in A^2(\mathbb{R}), g_1 \neq g_2$
- Fall 1: $g_1 \cap g_2 = \{P\}$
  oder
  Fall 2: $g_1 \cap g_2 = \emptyset$
- Hinzufügen von **unendlich-fernen Punkten** in allen Richtungen.
- Die **unendlich-ferne Gerade** ist die Menge aller unendlich-fernen Punkten.
- Affine Ebene mit unendlich-fernen Gerade heißt projektive Ebene über den reellen Zahlen $P^2(\mathbb{R})$.

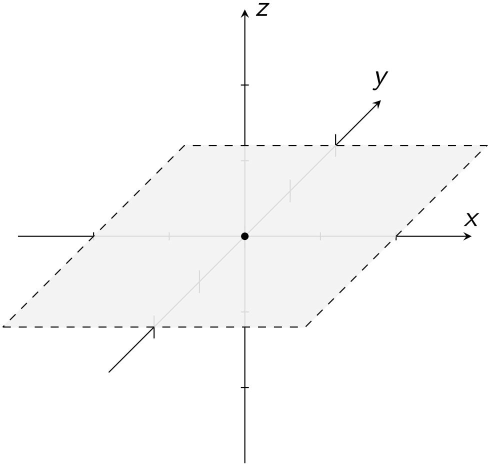
Konstruktion der projektiven Ebene

- $P \in A^2 \mapsto \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
- Jeder so erzeugte Punkt legt im $\mathbb{R}^3$ eine eindeutige Ursprungsgerade fest.



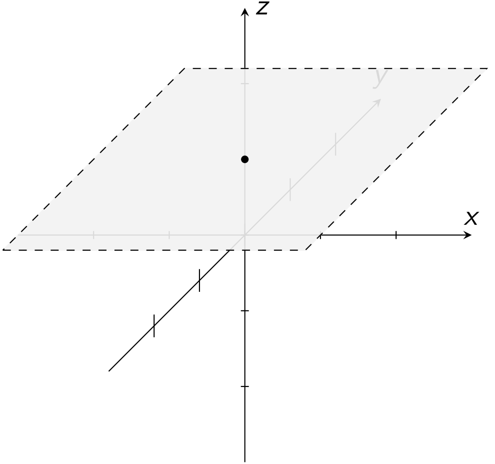
Konstruktion der projektiven Ebene

- $P \in A^2 \mapsto \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
- Jeder so erzeugte Punkt legt im $\mathbb{R}^3$ eine eindeutige Ursprungsgerade fest.



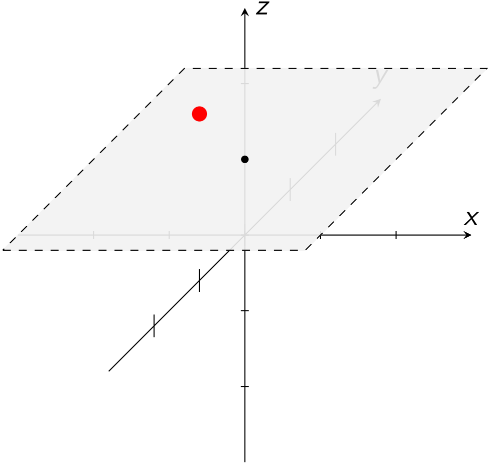
Konstruktion der projektiven Ebene

- $P \in A^2 \mapsto \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
- Jeder so erzeugte Punkt legt im $\mathbb{R}^3$ eine eindeutige Ursprungsgerade fest.



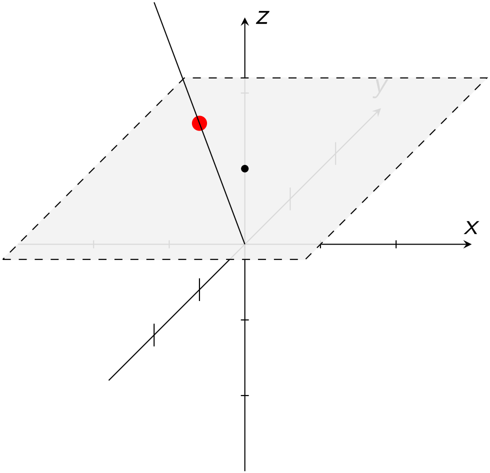
Konstruktion der projektiven Ebene

- $P \in A^2 \mapsto \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
- Jeder so erzeugte Punkt legt im $\mathbb{R}^3$ eine eindeutige Ursprungsgerade fest.



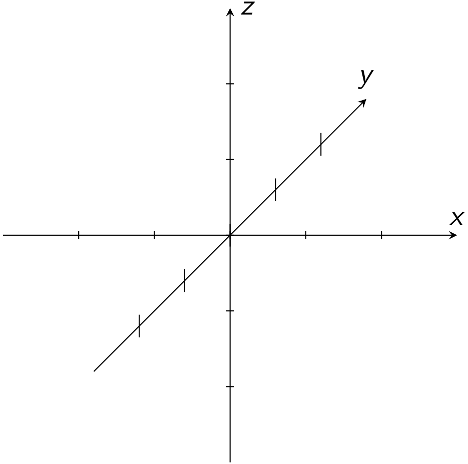
Konstruktion der projektiven Ebene

- $P \in A^2 \mapsto \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
- Jeder so erzeugte Punkt legt im $\mathbb{R}^3$ eine eindeutige Ursprungsgerade fest.



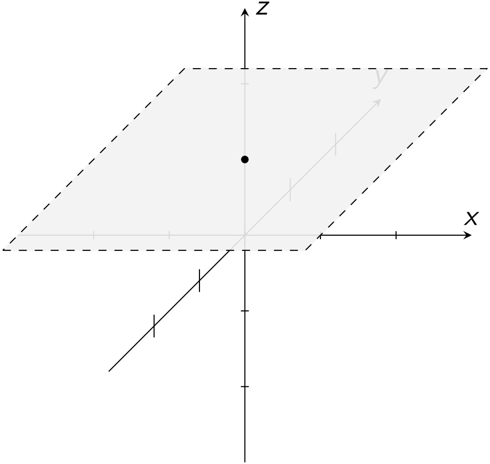
Konstruktion der projektiven Ebene

- Geraden im affinen Raum erzeugen hier eine Ursprungsebene.



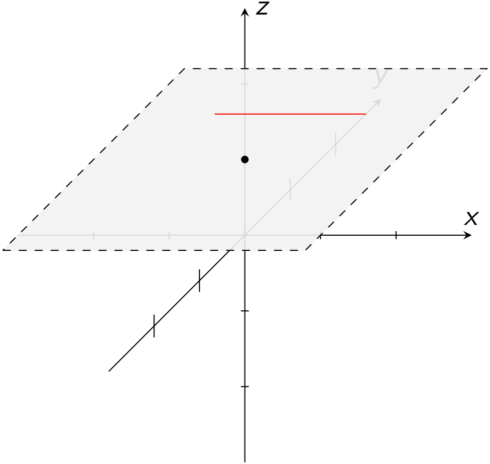
Konstruktion der projektiven Ebene

- Geraden im affinen Raum erzeugen hier eine Ursprungsebene.



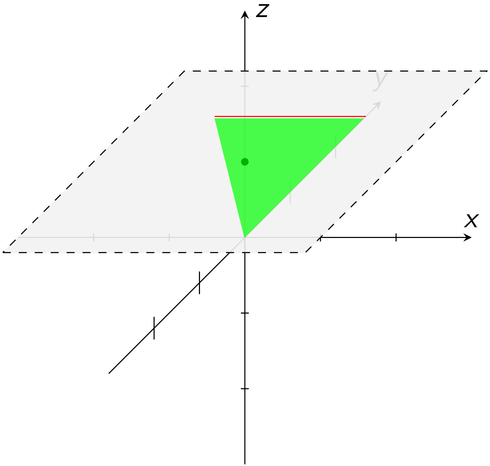
Konstruktion der projektiven Ebene

- Geraden im affinen Raum erzeugen hier eine Ursprungsebene.



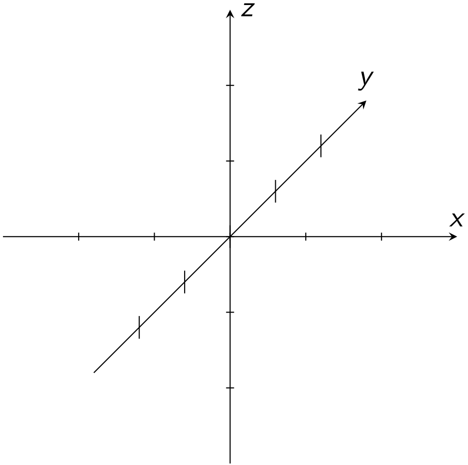
Konstruktion der projektiven Ebene

- Geraden im affinen Raum erzeugen hier eine Ursprungsebene.



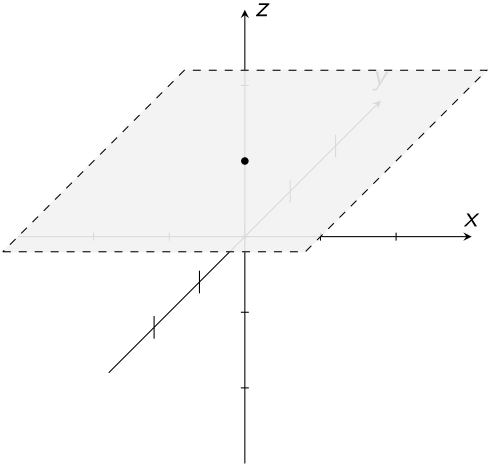
Konstruktion der projektiven Ebene

- Sich schneidende Geraden, erzeugen zwei sich schneidende Ursprungsebenen.



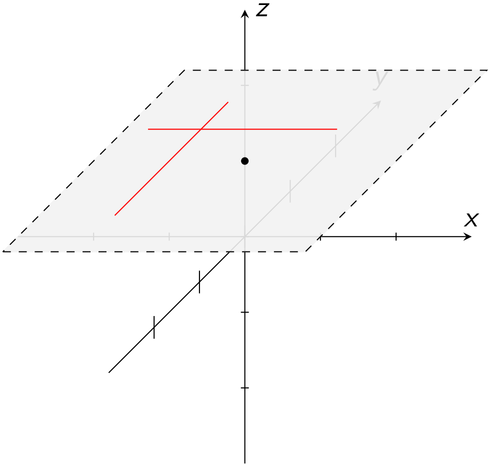
Konstruktion der projektiven Ebene

- Sich schneidende Geraden, erzeugen zwei sich schneidende Ursprungsebenen.

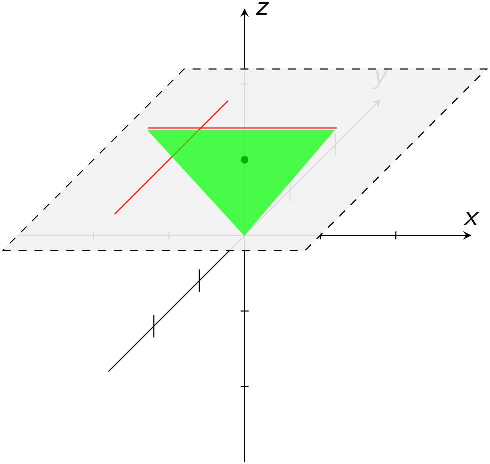


Konstruktion der projektiven Ebene

- Sich schneidende Geraden, erzeugen zwei sich schneidende Ursprungsebenen.

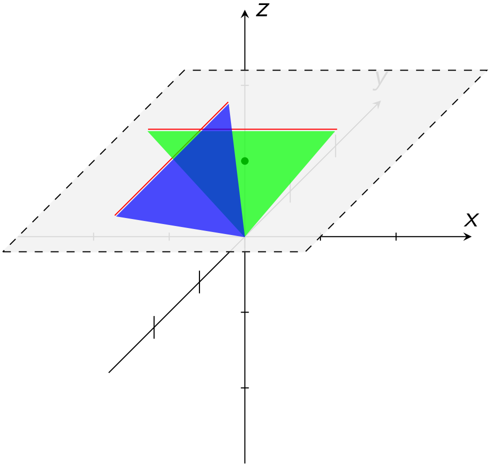


- Sich schneidende Geraden, erzeugen zwei sich schneidende Ursprungsebenen.



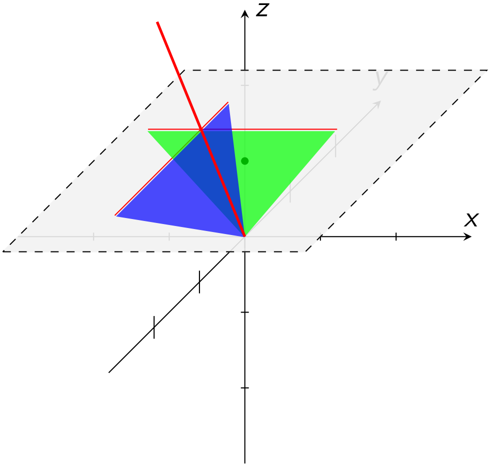
Konstruktion der projektiven Ebene

- Sich schneidende Geraden, erzeugen zwei sich schneidende Ursprungsebenen.



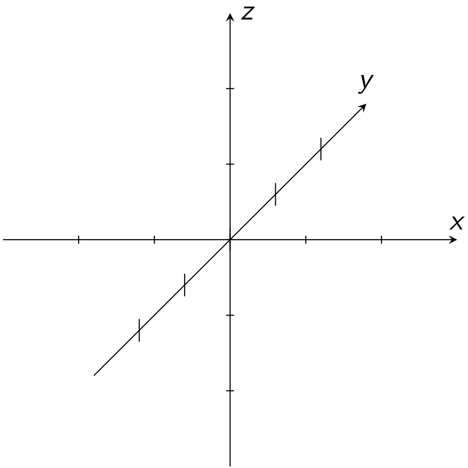
Konstruktion der projektiven Ebene

- Sich schneidende Geraden, erzeugen zwei sich schneidende Ursprungsebenen.



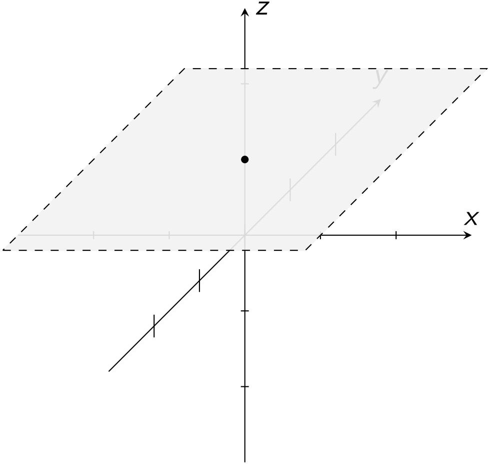
Konstruktion der projektiven Ebene

- Parallele Geraden im affinen Raum erzeugen zwei Ursprungsebenen.



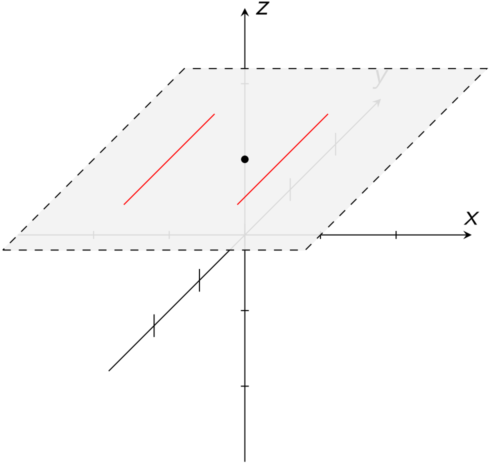
Konstruktion der projektiven Ebene

- Parallele Geraden im affinen Raum erzeugen zwei Ursprungsebenen.



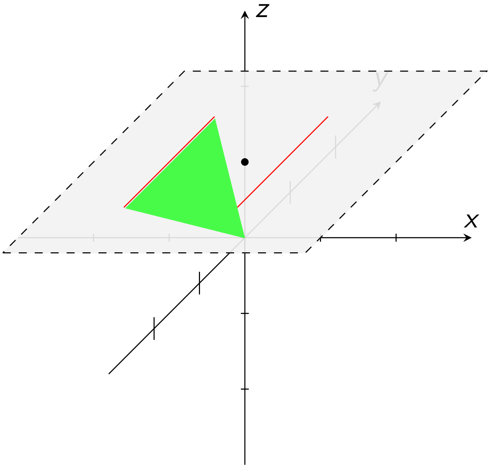
Konstruktion der projektiven Ebene

- Parallele Geraden im affinen Raum erzeugen zwei Ursprungsebenen.



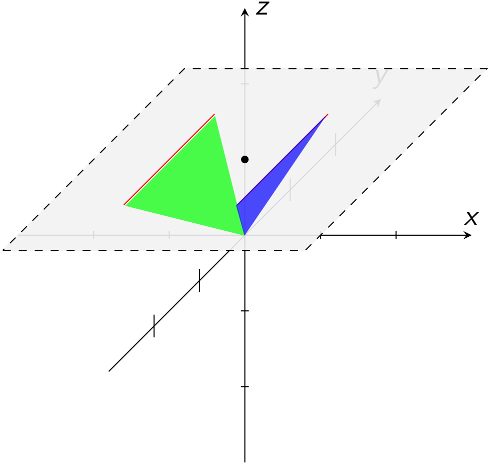
Konstruktion der projektiven Ebene

- Parallele Geraden im affinen Raum erzeugen zwei Ursprungsebenen.



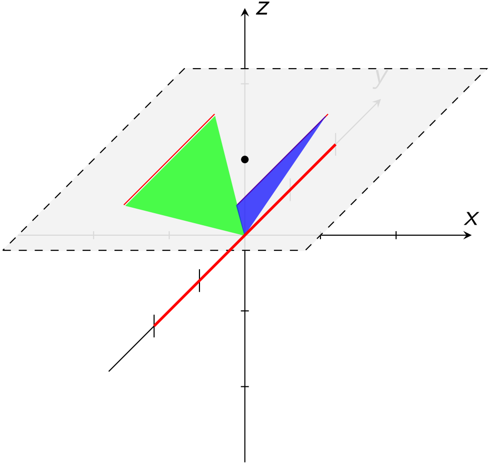
Konstruktion der projektiven Ebene

- Parallele Geraden im affinen Raum erzeugen zwei Ursprungsebenen.



Konstruktion der projektiven Ebene

- Parallele Geraden im affinen Raum erzeugen zwei Ursprungsebenen.



Konstruktion der projektiven Ebene

- Die Punkte der projektiven Ebene sind die Ursprungsgeraden des $\mathbb{R}^3$.
- Die Geraden der projektiven Ebene sind die Ursprungsebenen des $\mathbb{R}^3$.

Konstruktion der projektiven Ebene

- Die Punkte der projektiven Ebene sind die Ursprungsgeraden des $\mathbb{R}^3$.
- Die Geraden der projektiven Ebene sind die Ursprungsebenen des $\mathbb{R}^3$.
- Die unendlich-fernen Punkte sind die Ursprungsgeraden in der xy-Ebene.
- Die unendlich-ferne Gerade ist die Ursprungsebene $\{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}^3\}$.

Projektive Ebene

Das Mengenpaar (P,G) ist eine projektive Ebene, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

Projektive Ebene

Das Mengenpaar (P,G) ist eine projektive Ebene, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

1. Durch zwei verschiedene Punkte $A \neq B \in P$ existiert genau eine Gerade in G.

Projektive Ebene

Das Mengenpaar (P,G) ist eine projektive Ebene, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

1. Durch zwei verschiedene Punkte $A \neq B \in P$ existiert genau eine Gerade in G.
2. Auf jeder Geraden liegen mindestens drei Punkte.

Projektive Ebene

Das Mengenpaar (P,G) ist eine projektive Ebene, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

1. Durch zwei verschiedene Punkte $A \neq B \in P$ existiert genau eine Gerade in G.
2. Auf jeder Geraden liegen mindestens drei Punkte.
3. Es gibt drei Punkte in allgemeiner Lage.

Projektive Ebene

Das Mengenpaar (P,G) ist eine projektive Ebene, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

1. Durch zwei verschiedene Punkte $A \neq B \in P$ existiert genau eine Gerade in G.
2. Auf jeder Geraden liegen mindestens drei Punkte.
3. Es gibt drei Punkte in allgemeiner Lage.
4. Je zwei beliebige Geraden in G schneiden sich.

Fano-Ebene

Die Fano-Ebene ist die einfachste Form einer projektiven Ebene.

Fano-Ebene

Die Fano-Ebene ist die einfachste Form einer projektiven Ebene.

Die Punkte P und Geraden G einer Fano-Ebene werden klassischerweise wie folgt definiert:

$$\mathrm{P} = \{A, B, C, D, E, F, G\}$$

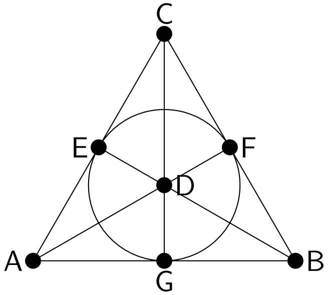
$$\mathrm{G} = \{\{A, B, G\}, \{A, C, E\}, \{B, C, F\},$$

$$\{A, D, F\}, \{B, D, E\}, \{C, D, G\}, \{E, F, G\}\}$$

Fano-Ebene

$$P = \{A, B, C, D, E, F, G\}$$

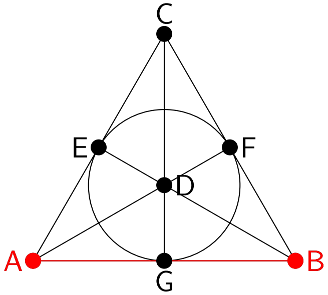
$$G = \{\{A, B, G\}, \{A, C, E\}, \{B, C, F\}, \{A, D, F\}, \{B, D, E\}, \{C, D, G\}, \{E, F, G\}\}$$



Fano-Ebene

$$P = \{A, B, C, D, E, F, G\}$$

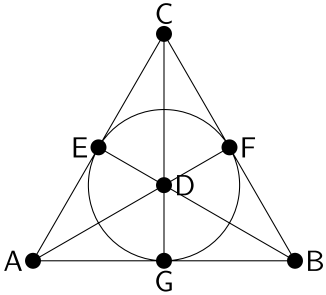
$$G = \{\{A, B, G\}, \{A, C, E\}, \{B, C, F\}, \{A, D, F\}, \{B, D, E\}, \{C, D, G\}, \{E, F, G\}\}$$



Fano-Ebene

$$P = \{A, B, C, D, E, F, G\}$$

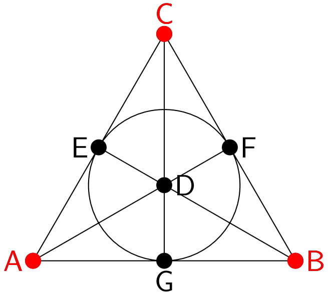
$$G = \{\{A, B, G\}, \{A, C, E\}, \{B, C, F\}, \{A, D, F\}, \{B, D, E\}, \{C, D, G\}, \{E, F, G\}\}$$



Fano-Ebene

$$P = \{A, B, C, D, E, F, G\}$$

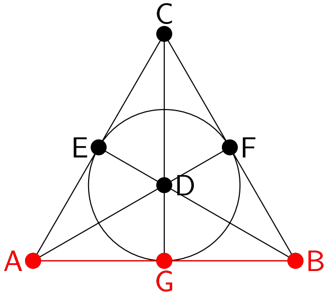
$$G = \{\{A, B, G\}, \{A, C, E\}, \{B, C, F\}, \{A, D, F\}, \{B, D, E\}, \{C, D, G\}, \{E, F, G\}\}$$



Fano-Ebene

$$P = \{A, B, C, D, E, F, G\}$$

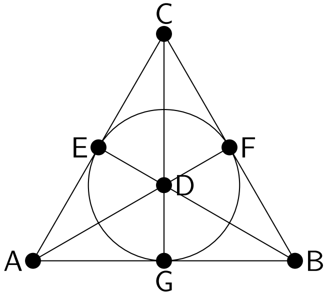
$$G = \{\{A, B, G\}, \{A, C, E\}, \{B, C, F\}, \{A, D, F\}, \{B, D, E\}, \{C, D, G\}, \{E, F, G\}\}$$



Dualität

$$P = \{A, B, C, D, E, F, G\}$$

$$G = \{\{A, B, G\}, \{A, C, E\}, \{B, C, F\}, \{A, D, F\}, \{B, D, E\}, \{C, D, G\}, \{E, F, G\}\}$$



Homogene Koordinaten

- Das homogene Koordinatensystem wird als Teil des projektiven Koordinatensystems gesehen.

Homogene Koordinaten

- Das homogene Koordinatensystem wird als Teil des projektiven Koordinatensystems gesehen.
- Homogene Koordinaten spielen unter anderem eine Rolle in der Computergrafik.

Homogene Koordinaten

- Das homogene Koordinatensystem wird als Teil des projektiven Koordinatensystems gesehen.
- Homogene Koordinaten spielen unter anderem eine Rolle in der Computergrafik.
- Translation: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix}$
- Skalierung: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
- Rotation: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Homogene Koordinaten

- Die Dimension der 2D Vektoren wird um eins erhöht.

Homogene Koordinaten

- Die Dimension der 2D Vektoren wird um eins erhöht.
- $(x, y) \mapsto (x * w, y * w, w), w \neq 0$ (für gewöhnlich $w = 1$)

Homogene Koordinaten

- Die Dimension der 2D Vektoren wird um eins erhöht.
- $(x, y) \mapsto (x * w, y * w, w), w \neq 0$ (für gewöhnlich $w = 1$)
- $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

Homogene Koordinaten

- Die Dimension der 2D Vektoren wird um eins erhöht.
- $(x, y) \mapsto (x * w, y * w, w), w \neq 0$ (für gewöhnlich $w = 1$)
- $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$
- Translation: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$
- Skalierung: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$
- Rotation: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!