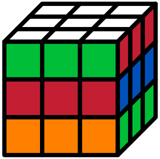


Rubik's Cube

Höllinger, Kanzler, Widmoser

WS 2016/17

Erfinder:

Name: Ernó Rubik
geboren: 13.Juli 1944
in: Budapest, Ungarn
Beruf: Architekt und Bildhauer

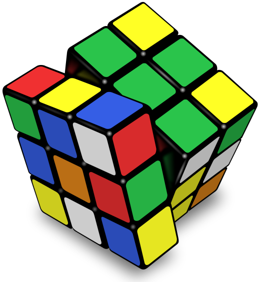
[1]

Was ist ein Rubik's Cube?

- Der Rubik's Cube auch Zauberwürfel genannt ist ein Drehpuzzle.

Was ist ein Rubik's Cube?

- Der Rubik's Cube auch Zauberwürfel genannt ist ein Drehpuzzle.
- Ziel ist es bei einem verdrehten Würfel (Bsp. Bild rechts), die Seiten so lange zu rotieren, bis sich auf jeder Seite genau eine Farbe befindet.



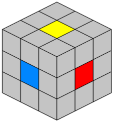
[1]

Aufbau:

- Standardwürfel Maße: $3 \times 3 \times 3$
- Besteht aus 6 verschiedenen Farben

Aufbau:

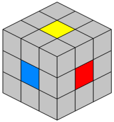
- Standardwürfel Maße: $3 \times 3 \times 3$
- Besteht aus 6 verschiedenen Farben
- 6 Mittelsteine (einfarbig)



[2]

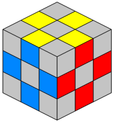
Aufbau:

- Standardwürfel Maße: $3 \times 3 \times 3$
- Besteht aus 6 verschiedenen Farben
- 6 Mittelsteine (einfarbig)



[2]

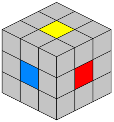
- 12 Kantensteine (zweifarbig)



[2]

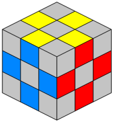
Aufbau:

- Standardwürfel Maße: $3 \times 3 \times 3$
- Besteht aus 6 verschiedenen Farben
- 6 Mittelsteine (einfarbig)



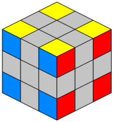
[2]

- 12 Kantensteine (zweifarbig)



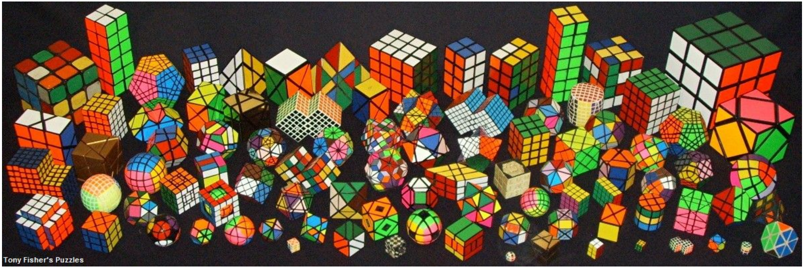
[2]

- 8 Ecksteine (dreifarbig)



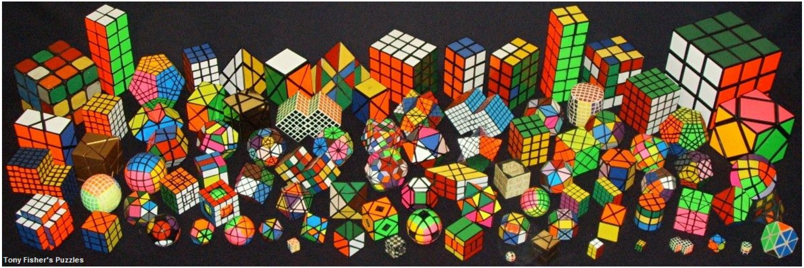
[2]

Variationen:

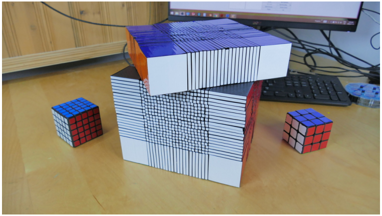


verschiedene Typen und Größen [3]

Variationen:



verschiedene Typen und Größen [3]



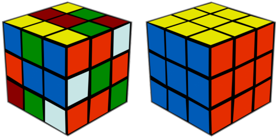
[4]

Größter Würfel der Welt

[5]

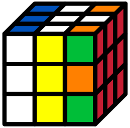
Dogic (schwerstes Drehpuzzle)

Wir beziehen uns heute nur auf die Standardversion:

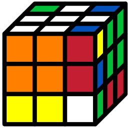


[6]

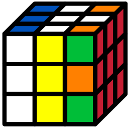
Permutationen (1)



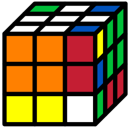
$$\frac{8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12}}{2 \cdot 2 \cdot 3}$$



Permutationen (1)



$$\frac{8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12}}{2 \cdot 2 \cdot 3}$$



- Weder kann man nur 2 Kanten oder nur 2 Ecken vertauschen, d.h. die Anzahl der paarweisen Vertauschungen muss immer gerade sein.
- Wird eine Kante gekippt, wird immer auch eine andere Kante gekippt. Nur die Hälfte der Kanten Orientierung ist möglich.
- Nur ein Drittel der Ecken Orientierung ist möglich (3 Seiten).

Permutationen (2)

Anzahl der verschiedenen Stellungen

$$\frac{8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12}}{2 \cdot 2 \cdot 3} = 43\,252\,003\,274\,489\,856\,000 \approx 4.3 \cdot 10^{19}$$

Permutationen (2)

Anzahl der verschiedenen Stellungen

$$\frac{8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12}}{2 \cdot 2 \cdot 3} = 43\,252\,003\,274\,489\,856\,000 \approx 4.3 \cdot 10^{19}$$

- $4.3 \cdot 10^{19}$ sek wären ca. 300x das Alter der Erde ($1.4 \cdot 10^{17}$ sek)

Permutationen (2)

Anzahl der verschiedenen Stellungen

$$\frac{8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12}}{2 \cdot 2 \cdot 3} = 43\,252\,003\,274\,489\,856\,000 \approx 4.3 \cdot 10^{19}$$

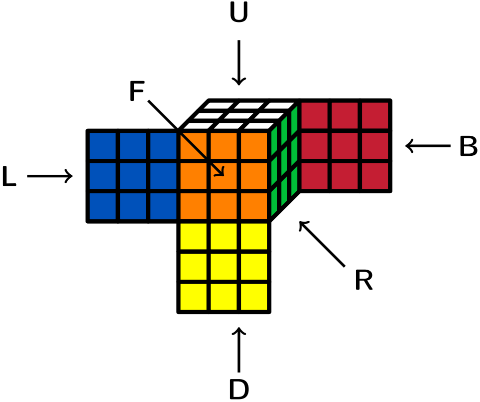
- $4.3 \cdot 10^{19}$ sek wären ca. 300x das Alter der Erde ($1.4 \cdot 10^{17}$ sek)
- Erdoberfläche: ≈ 510 Millionen $km^2 = 51 \cdot 10^{17} cm^2$
  Würfel mit 5.75cm Kantenlänge hat also ca. $33cm^2$. D.h. man bräuchte also ca. $1.54 \cdot 10^{17}$ viele Würfel um die Erde zu bedecken.

Singmaster Notation / Basis Drehungen

- **U** (Up) 
- **D** (Down) 
- **F** (Front) 
- **B** (Back) 

- **L** (Left) 
- **R** (Right) 

(Im Uhrzeigersinn)



Gruppentheorie (1)

Sei G eine Menge und $\circ$ eine zweistellige Operation auf G, dann nennt man das Paar $(G, \circ)$ eine Gruppe, falls folgende Axiome erfüllt werden:

Gruppentheorie (1)

Sei G eine Menge und $\circ$ eine zweistellige Operation auf G, dann nennt man das Paar $(G, \circ)$ eine Gruppe, falls folgende Axiome erfüllt werden:

1. Vollständigkeit,
2. Assoziativität: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \quad \forall_{a,b,c} \in G$,
3. es gibt ein neutrales Element,
4. für jedes Gruppenelement existiert ein inverses Element.

Gruppentheorie (1)

Sei G eine Menge und $\circ$ eine zweistellige Operation auf G, dann nennt man das Paar $(G, \circ)$ eine Gruppe, falls folgende Axiome erfüllt werden:

1. Vollständigkeit,
2. Assoziativität: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \quad \forall_{a,b,c} \in G$,
3. es gibt ein neutrales Element,
4. für jedes Gruppenelement existiert ein inverses Element.

Zum Beispiel: $(\mathbb{Z}, +)$.

- Sei G_C die Menge aller möglichen Verdrehungen des Würfels, welche aus den Basiszügen $\{U, D, F, B, L, R\}$ besteht und
- $\circ$ eine Verkettung der Drehung.

Gruppentheorie (2)

Definition (Symmetrische Gruppe)

Die symmetrische Gruppe S_n ist die Gruppe, die aus allen Permutationen einer n-elementigen Menge besteht.

Also $G_C \subset S_{48}$ $(9 \cdot 6 = 54 - 6 = 48)$.

Gruppentheorie (2)

Definition (Symmetrische Gruppe)

Die symmetrische Gruppe S_n ist die Gruppe, die aus allen Permutationen einer n-elementigen Menge besteht.

Also $G_C \subset S_{48}$ $(9 \cdot 6 = 54 - 6 = 48)$.

Vorteil: (Bsp. S_3) $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \ldots, \sigma_6$

Verknüpfungstabelle:

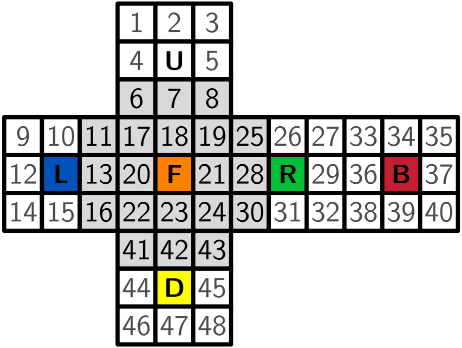
	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6
σ_2	σ_2	σ_1	σ_5	σ_6	σ_3	σ_4
σ_3	σ_3	σ_4	σ_1	σ_2	σ_6	σ_5
...	...	...	...	...	...	...

Problem: Tabelle wäre $48!^2$ groß.

Disjunkte Zykelschreibweise

Angenommen: 

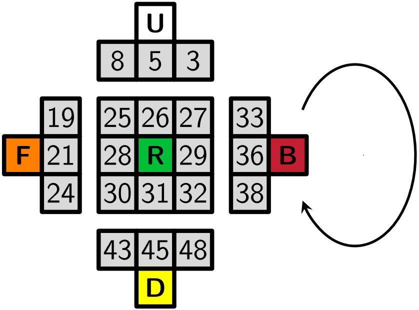
F



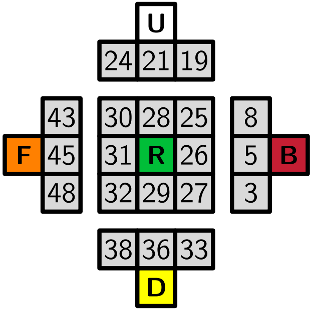
- Bijektion zwischen Aufkleber und den Zahlen 1-48
- F = (17,19,24,22)
  (18,21,23,20)
  (06,25,43,16)
  (07,28,42,13)
  (08,30,41,11)
- Die Permutation **F** hat also Ordnung 4

Bsp. Algorithmus **RU** (1)

Vor **R**:



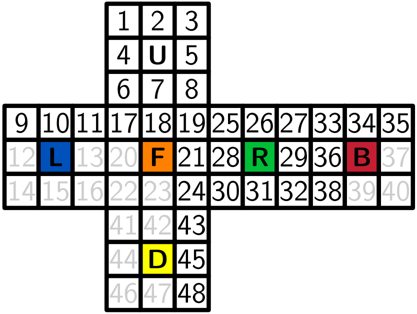
Nach **R**:



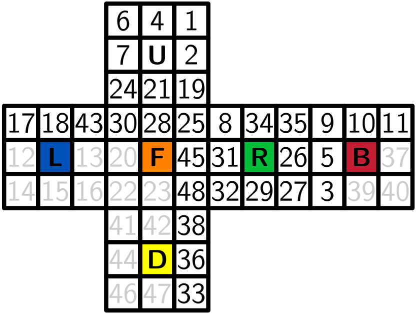
Analog mit **U**

Bsp. Algorithmus **RU** (2)

Startnummerierung:



Nach **RU**:



$$1 \to 3 \to 38 \to 43 \to 11 \to \ldots$$

Bsp. Algorithmus **RU** (3)

- $(1, 3, 38, 43, 11, 35, 27, 32, 30, 17, 9, 33, 48, 24, 6)$ - 15
- $(2, 5, 36, 45, 21, 7, 4)$ - 7
- $(8, 25, 19)$ - 3
- $(10, 34, 26, 29, 31, 28, 18)$ - 7

Definition (*kgV* - kleinstes gemeinsames Vielfaches)

Der *kgV* von Zahlen ist also die kleinste Zahl, durch die alle gegebenen Zahlen teilbar sind.

Bsp. Algorithmus **RU** (3)

- $(1, 3, 38, 43, 11, 35, 27, 32, 30, 17, 9, 33, 48, 24, 6)$ - 15
- $(2, 5, 36, 45, 21, 7, 4)$ - 7
- $(8, 25, 19)$ - 3
- $(10, 34, 26, 29, 31, 28, 18)$ - 7

Definition (*kgV* - kleinstes gemeinsames Vielfaches)

Der *kgV* von Zahlen ist also die kleinste Zahl, durch die alle gegebenen Zahlen teilbar sind.

$kgV(15, 7, 3, 7) = 105$ mal **RU** anwenden um wieder zur Ausgangsstellung zu gelangen.

Gottes Algorithmus

Definition

Wird für alle Puzzle mit endlichen Konfigurationen und wenigen/einfachen Bewegungen verwendet.

Gottes Algorithmus

Definition

Wird für alle Puzzle mit endlichen Konfigurationen und wenigen/einfachen Bewegungen verwendet.

- Die 'Gottes Zahl' dient dabei als die maximale Anzahl an Schritten, die für eine optimale Lösung benötigt werden.
- Für den Zauberwürfel liegt diese Zahl bei 20. (bzw. 26)

Gottes Algorithmus

Definition

Wird für alle Puzzle mit endlichen Konfigurationen und wenigen/einfachen Bewegungen verwendet.

- Die 'Gottes Zahl' dient dabei als die maximale Anzahl an Schritten, die für eine optimale Lösung benötigt werden.
- Für den Zauberwürfel liegt diese Zahl bei 20. (bzw. 26)
- Bekannter Algorithmus z.B. für Türme von Hanoi.
- Unbekannt für Schach, Go, etc. . .

Fakten

- Google hat circa 35 CPU-Jahre gespendet, um die Gottes Zahl zu bestimmen. Dabei wurden etwa 2 Milliarden Gruppen von je etwa 19.5 Milliarden Konfigurationen gelöst.

Fakten

- Google hat circa 35 CPU-Jahre gespendet, um die Gottes Zahl zu bestimmen. Dabei wurden etwa 2 Milliarden Gruppen von je etwa 19.5 Milliarden Konfigurationen gelöst.
- $\sim$67% aller Würfel können in 18 Zügen gelöst werden und $\sim$28% in 17 Zügen. Also sind $\sim$95% aller Würfel in 17 oder 18 Zügen lösbar.

Fakten

- Google hat circa 35 CPU-Jahre gespendet, um die Gottes Zahl zu bestimmen. Dabei wurden etwa 2 Milliarden Gruppen von je etwa 19.5 Milliarden Konfigurationen gelöst.
- $\sim$67% aller Würfel können in 18 Zügen gelöst werden und $\sim$28% in 17 Zügen. Also sind $\sim$95% aller Würfel in 17 oder 18 Zügen lösbar.
- Es gibt geschätzt 490 Millionen Konfigurationen, die 20 Züge benötigen.

Thistlethwaite's Algorithmus

- Unterteilt das Problem in 4 Teilprobleme, die jeweils nur beschränkte Bewegungen ausführen dürfen.

Thistlethwaite's Algorithmus

- Unterteilt das Problem in 4 Teilprobleme, die jeweils nur beschränkte Bewegungen ausführen dürfen.
  - $G_0 = \langle L, R, F, B, U, D \rangle$
  - $G_1 = \langle L, R, F, B, U^2, D^2 \rangle$
  - $G_2 = \langle L, R, F^2, B^2, U^2, D^2 \rangle$
  - $G_3 = \langle L^2, R^2, F^2, B^2, U^2, D^2 \rangle$
  - $G_4 = \{1\}$

Thistlethwaite's Algorithmus

- Unterteilt das Problem in 4 Teilprobleme, die jeweils nur beschränkte Bewegungen ausführen dürfen.
  - $G_0 = \langle L, R, F, B, U, D \rangle$
  - $G_1 = \langle L, R, F, B, U^2, D^2 \rangle$
  - $G_2 = \langle L, R, F^2, B^2, U^2, D^2 \rangle$
  - $G_3 = \langle L^2, R^2, F^2, B^2, U^2, D^2 \rangle$
  - $G_4 = \{1\}$
- Anfangs maximal 85 Drehungen, verbessert auf $80 > 63 > 52$. Später wurde gezeigt, dass die optimale Anzahl pro Phase bei 7, 10, 13 und 15 liegt, also 45 Drehungen maximal.

Kociemba's Algorithmus

- Verbesserte Variante des Thistlethwaite's Algorithmus. (Nur noch 2 Teilprobleme)

Kociemba's Algorithmus

- Verbesserte Variante des Thistlethwaite's Algorithmus. (Nur noch 2 Teilprobleme)
  - $G_0 = \langle U, D, L, R, F, B \rangle$
  - $G_1 = \langle U, D, L^2, R^2, F^2, B^2 \rangle$
  - $G_2 = \{1\}$
- Die Phasen benötigen höchstens 12 und 18 Drehungen.

Kociemba's Algorithmus

- Verbesserte Variante des Thistlethwaite's Algorithmus. (Nur noch 2 Teilprobleme)
  - $G_0 = \langle U, D, L, R, F, B \rangle$
  - $G_1 = \langle U, D, L^2, R^2, F^2, B^2 \rangle$
  - $G_2 = \{1\}$
- Die Phasen benötigen höchstens 12 und 18 Drehungen.
- Nimmt man eine suboptimale Lösung für das erste Teilproblem, kann die Gesamtlösung optimiert werden. (Meist auf unter 21, aber es gibt keinen Beweis dafür)

Kociemba's Algorithmus

- Verbesserte Variante des Thistlethwaite's Algorithmus. (Nur noch 2 Teilprobleme)
  - $G_0 = \langle U, D, L, R, F, B \rangle$
  - $G_1 = \langle U, D, L^2, R^2, F^2, B^2 \rangle$
  - $G_2 = \{1\}$
- Die Phasen benötigen höchstens 12 und 18 Drehungen.
- Nimmt man eine suboptimale Lösung für das erste Teilproblem, kann die Gesamtlösung optimiert werden. (Meist auf unter 21, aber es gibt keinen Beweis dafür)
- Jeder Würfel kann mit höchstens 29 Drehungen gelöst werden.

Korf's Algorithmus

- Verwendet Tiefensuche um optimale Lösung zu finden.
- Auch hier werden Teilprobleme gelöst:
  - Nur die Ecken des Würfels, Kanten sind egal.
  - 6 Kanten des Würfels, Ecken und restliche Kanten sind egal.
  - Restlichen Kanten des Würfels.

Korf's Algorithmus

- Verwendet Tiefensuche um optimale Lösung zu finden.
- Auch hier werden Teilprobleme gelöst:
  - Nur die Ecken des Würfels, Kanten sind egal.
  - 6 Kanten des Würfels, Ecken und restliche Kanten sind egal.
  - Restlichen Kanten des Würfels.
- Zu einem beliebigen Startwürfel werden iterativ neue Würfel erzeugt, die mit n-vielen Drehungen entstehen können. Alle Würfel, die zu viele Drehungen brauchen, um optimal zu bleiben, werden gelöscht.

Korf's Algorithmus

- Verwendet Tiefensuche um optimale Lösung zu finden.
- Auch hier werden Teilprobleme gelöst:
  - Nur die Ecken des Würfels, Kanten sind egal.
  - 6 Kanten des Würfels, Ecken und restliche Kanten sind egal.
  - Restlichen Kanten des Würfels.
- Zu einem beliebigen Startwürfel werden iterativ neue Würfel erzeugt, die mit n-vielen Drehungen entstehen können. Alle Würfel, die zu viele Drehungen brauchen, um optimal zu bleiben, werden gelöscht.
- Liefert stets optimale Lösungen, aber Laufzeit ist unbekannt!

Rekorde

Person	Einzeln	Kategorie	∅	Person
Feliks Zemdegs	4.73	Zauberwürfel	6.45	Feliks Zemdegs
Maciej Czapiewski	0.49	2x2x2 Würfel	1.51	Lucas Etter
Feliks Zemdegs	21.54	4x4x4 Würfel	26.03	Sebastian Weyer
Feliks Zemdegs	41.27	5x5x5 Würfel	49.32	Feliks Zemdegs
Feliks Zemdegs	1:32.47	6x6x6 Würfel	1:37.85	Feliks Zemdegs
Feliks Zemdegs	2:20.66	7x7x7 Würfel	2:22.55	Feliks Zemdegs
Kaijun Lin	18.50	3x3x3 Blind	24.38	Kaijun Lin
Feliks Zemdegs	6.88	3x3x3 Einhändig	10.59	Max Park
Jakub Kipa	20.57	3x3x3 Mit Füßen	28.16	Jakub Kipa
Marcin Kowalczyk	41/41 54:14	3x3x3 Mehrfach-blind	-	-

Abbildung: Derzeitige Weltrekorde

Literaturangabe

- Wikipedia: Rubik's Cube
  https://en.wikipedia.org/wiki/Rubik's_Cube
- Martin Wohlgemuth
  Mathematik: Ein Spielzeug mit Gruppenstruktur
  http://matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/article.php?sid=1154
- Oswald Riemenschneider
  Elemente der Gruppentheorie
  http://www.math.uni-hamburg.de/home/riemenschneider/RubiksCube.pdf
- David Joyner
  Adventures in Group Theory: Rubik's Cube
  http://mike.verdone.ca/media/rubiks.pdf
- World Cube Association - Derzeitige Weltrekorde
  https://www.worldcubeassociation.org/results/regions.php?regionId=&eventId=&years=&slim=Slim

Abbildungsverzeichnis

- [1] https://de.wikipedia.org/wiki/Erno_Rubik
- [2] http://www.rubiks-cube-zauberwuerfel.com
- [3] http://tonyfisherpuzzles.net
- [4] http://www.solidsmack.com/fabrication/3d-printed-22x22-rubiks-cube-is-the-largest-in-the-world
- [5] https://de.wikipedia.org/wiki/Dogic
- [6] http://www.hirnsport.de/denksport2/denksport2/2012/09/geschichte-rubikon-wuerfel-zauberwuerfel