3SUM Hardness

D. Schwarz

WS 2016/17

1. **3SUM Hardness**
   - 3SUM
   - Konzept
   - Formal

2. **Beispiele**
   - Grundprobleme
   - Schnittprobleme
   - Separatorprobleme
   - Überdeckungsprobleme
   - Sichtbarkeitsprobleme
   - Übersicht: Relationen zwischen den Problemen

Das 3SUM Problem

Gegeben eine Menge von n ganzen Zahlen.
Gibt es drei Zahlen deren Summe 0 ergibt?

- 3SUM hat eine Laufzeit $O(n^2)$.
- Als untere Schranke ist im moment keine bessere als $\Omega(n \log n)$ bekannt.

Ungelöstes Problem der Computerwissenschaften

Gibt es einen Algorithmus, welcher das 3SUM Problem in Zeit $O(n^{2-\epsilon})$ für ein $\epsilon > 0$ löst?

Das Konzept *3SUM Hardness* wurden 1995 von A. Gajentaan und M. H. Overmars (Universität Utrecht, Niederlanden) eingeführt.

Da 3SUM für sich alleine in der Praxis keine große Bedeutung hatte war ihre Idee es Probleme zu finden, die *mindestens so schwer* wie 3SUM sind.

Daher kommt die Bezeichnung *3SUM-hard*.

Notation

Seien R und Q zwei Probleme.
Wenn wir R mittels Q in Zeit $O(f(n))$ lösen können, sagen wir:
R ist f(n)-lösbar mittels Q
Schreibweise: $R \lll_{f(n)} Q$
$R \lll_{f(n)} Q \wedge Q \lll_{f(n)} R \Leftrightarrow R ==_{f(n)} Q$ ... $f(n)$-äquivalent

Folgerung

Sei $R \lll_{f(n)} Q$ und $f(n)$, $g(n)$ Polynome mit $f(n) = O(g(n))$:

- Ist Q lösbar in Zeit $O(g(n)) \Rightarrow R$ ist lösbar in Zeit $O(g(n))$
- Ist $\Omega(g(n))$ untere Schranke für R und $f(n) = o(g(n))$, dann folgt $\Omega(g(n))$ ist untere Schranke für Q

3SUM-hard

Ein Problem P heißt 3SUM-hard genau dann, wenn gilt $3SUM \lll_{f(n)} P$ mit $f(n)$ wächst langsamer als n^2.

Folgerung

Sei P 3SUM-hard:

- Algorithmen für P haben immer eine Laufzeit größer gleich $O(n^2)$.
  Findet man einen mit einer kleineren Laufzeit, folgt daraus die Existenz eines Äquivalenten für 3SUM.
- Die untere Schranke $\Omega(n \log n)$ von 3SUM überträgt sich auf P.

Die folgende drei Probleme sind f(n)-äquivalent und bilden die Basis für alle weiteren Reduktionen.

3SUM

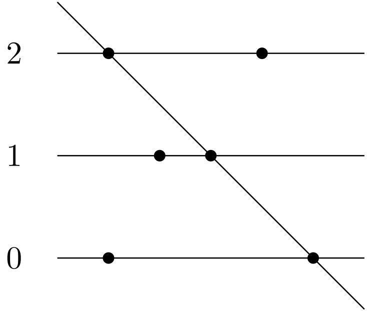
Gegeben eine Menge von n ganzen Zahlen.
Gibt es drei Zahlen deren Summe 0 ergibt?

3SUM' ($3SUM ==_n 3SUM'$)

Gegeben sind drei Mengen A, B und C welche insgesamt n ganze Zahlen enthalten.
Gibt es $a \in A, b \in B, c \in C$ mit $a + b = c$?

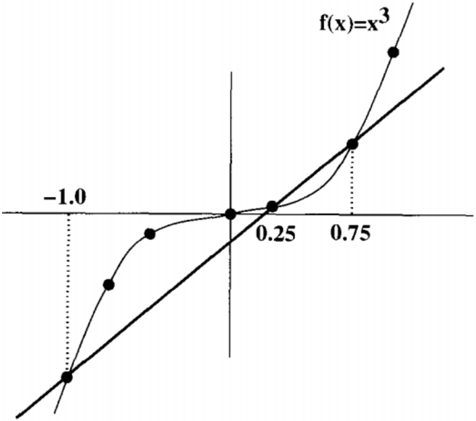
GeomBase (*GeomBase* $==_n$ *3SUM'*)

Gegeben seien n Punkte, welche in der Ebene auf den horizontalen Linien y = 0, y = 1 und y = 2 liegen. Gibt es eine nicht-horizontale Linie durch drei dieser Punkte?



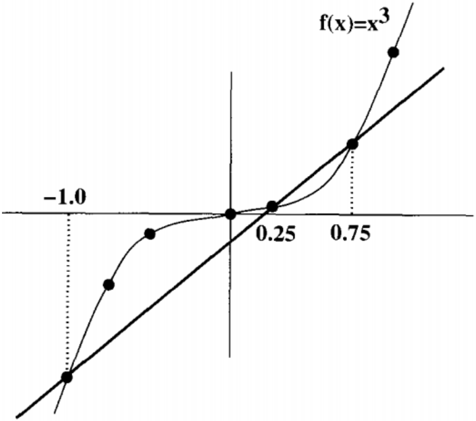
3-Points-on-Line ($3SUM \lll_n$ *3-Points-on-Line*)

Gegeben sei eine Menge von n Punkte in der Ebene. Gibt es eine Linie durch mindestens drei dieser Punkte?



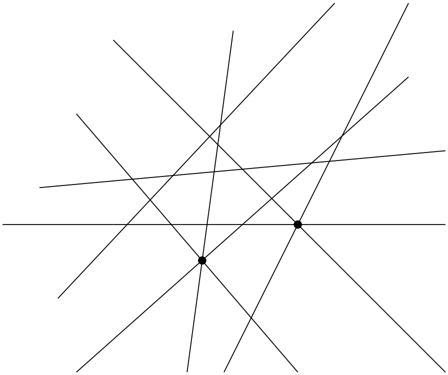
Interresantes beim Beweis von 3SUM $\lll_n$ 3-P-o-L

Jede Zahl x aus der Menge von 3SUM wird in der Ebene zum Punkt (x, x^3). D.h. wenn $a + b + c = 0$, dann gibt es eine Linie durch die Punkte $(a, a^3), (b, b^3)$ und (c, c^3) .



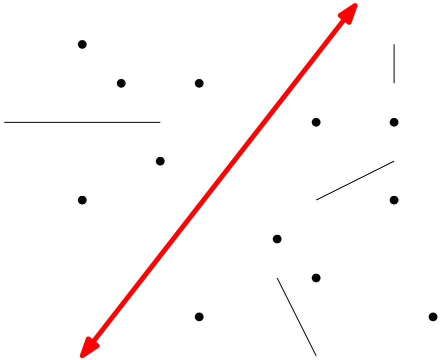
Point-on-3-Lines (P-o-3-L $==_n$ 3-P-o-L)

Gegeben ist eine Menge von n Geraden in der Ebene. Gibt es einen Punkt, der auf mindestens drei der Linien liegt.



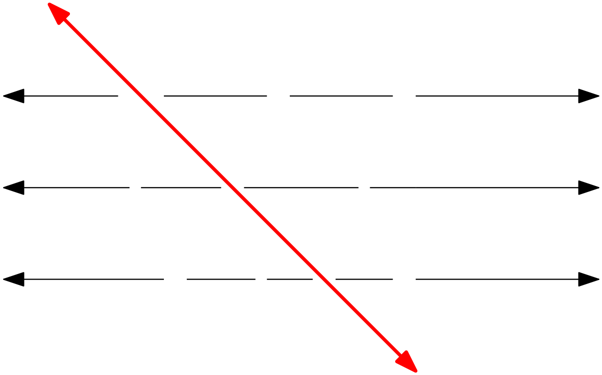
Separator

Gegeben eine Menge von n Objekten in der Ebene.
Ein Separator ist eine Gerade, die kein Objekt schneidet und auf beiden Seiten mindestens ein Objekt enthält.



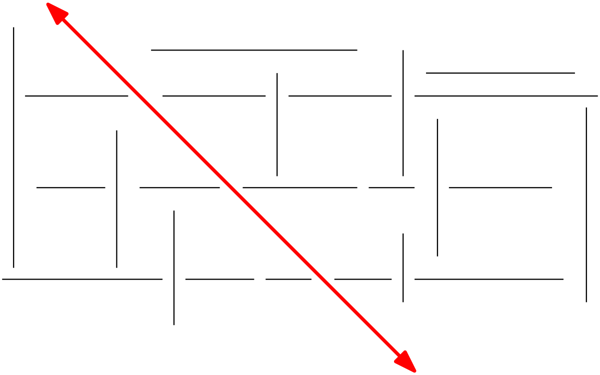
Seperator1 (*GeomBase* $\lll_{n \log n}$ *Seperator*1)

Gegeben eine Menge von n horizontalen Halbgeraden und Strecken.
Existiert ein nicht horizontaler Separator?



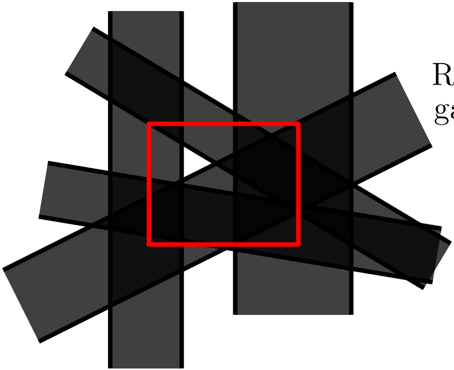
Seperator2 (*GeomBase* $\lll_{n \log n}$ *Seperator2*)

Gegeben eine Menge von n, sich nicht berührenden, achsenparallelen Strecken.
Existiert ein Separator?



Strips-cover-Box (*GeomBase* $\lll_{n \log n}$ *Strips-cover-Box*)

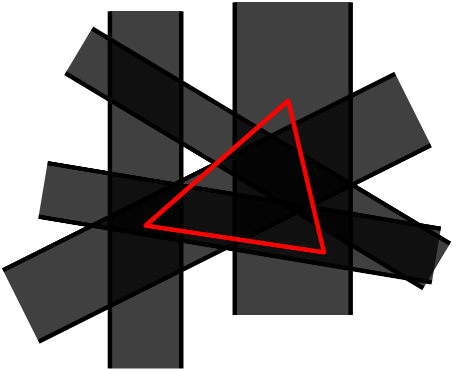
Gegeben eine Menge von Streifen (= unendlich große Fläche zwischen zwei parallelen Geraden) in der Ebene.
Überdeckt die Vereinigung aller Streifen der Menge ein gegebenes Rechteck?



Rechteck wird nicht ganz überdeckt!

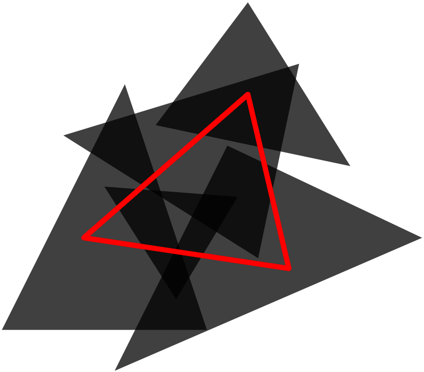
Strips-cover-Triangle (*S-c-Box* $\lll_n$ *S-c-Triangle*)

Gegeben eine Menge von Streifen (= unendlich große Fläche zwischen zwei parallelen Geraden) in der Ebene.
Überdeckt die Vereinigung aller Streifen der Menge ein gegebenes Dreieck?



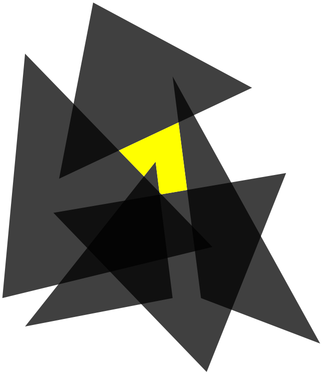
Triangles-cover-Triangle (*S-c-Box* $\lll_n$ *Ts-c-Triangle*)

Gegeben eine Menge von Dreiecken in der Ebene.
Überdeckt die Vereinigung aller Dreiecke ein weiteres gegebenes Dreieck?



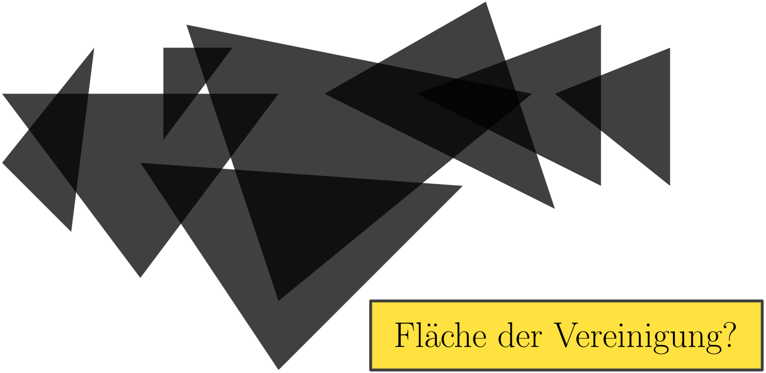
Hole-in-Union (*Ts-c-T* $\lll_n$ *H-in-U* & *H-in-U* $\lll_{n \log^2 n}$ *Ts-c-T*)

Gegeben eine Menge von Dreiecken in der Ebene.
Enthält deren Vereinigung ein Loch?



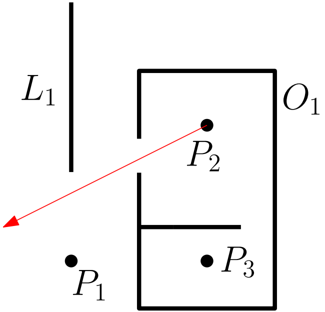
Triangle-Measure (*Ts-c-T* $\lll_n$ *Triangle-Measure*)

Gegeben eine Menge von Dreiecken in der Ebene.
Berechne die Fläche ihrer Vereinigung.



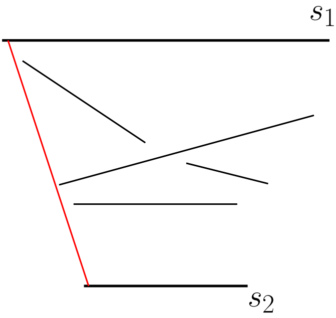
Sichtbarkeit

- Zwei Objekte sehen sich, wenn man sie mit einer Strecke verbinden kann ohne dass sie andere Objekte schneidet.
- Ein Objekt kann von der Unendlichkeit aus gesehen werden, wenn man vom Objekt aus ein Halbgerade zeichnen kann ohne dass sie andere Objekte schneidet.



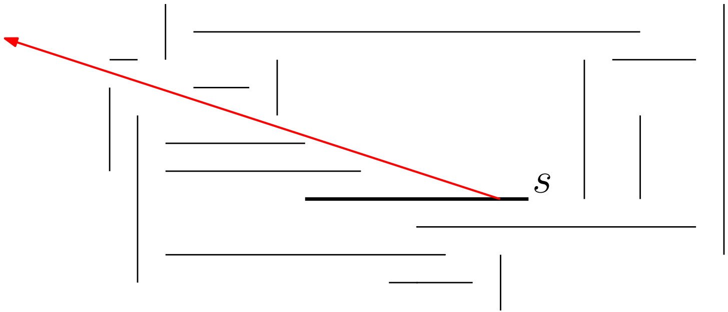
Visibility-between-Segments (*GeomBase* $\lll_{n \log n}$ *V-b-S*)

Gegeben eine Menge von n Strecken und zwei weitere Strecken s_1 und s_2.
Können sich s_1 und s_2 sehen?



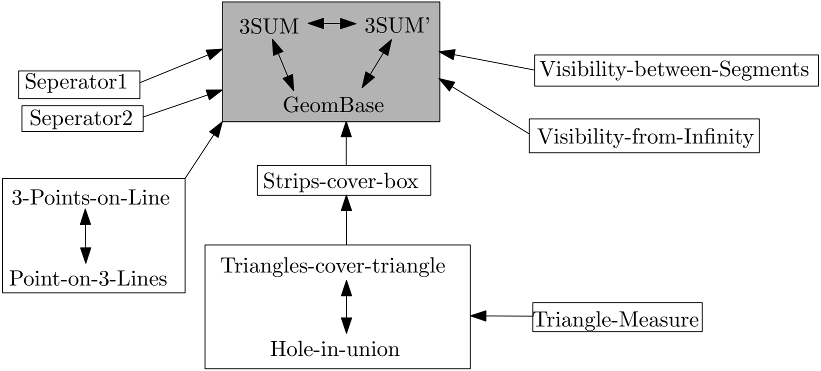
Visibility-from-Infinity (*GeomBase* $\ll_{n \log n}$ *V-f-Inf*)

Gegeben eine Menge von achsenparallelen Strecken und einer weiteren horizontalen Strecke s.
Kann s von der Unendlichkeit aus gesehen werden?



1. **3SUM Hardness**
   - 3SUM
   - Konzept
   - Formal

2. **Beispiele**
   - Grundprobleme
   - Schnittprobleme
   - Separatorprobleme
   - Überdeckungsprobleme
   - Sichtbarkeitsprobleme
   - Übersicht: Relationen zwischen den Problemen


3SUM
3SUM'
GeomBase
Seperator1
Seperator2
Visibility-between-Segments
Visibility-from-Infinity
3-Points-on-Line
Point-on-3-Lines
Strips-cover-box
Triangles-cover-triangle
Hole-in-union
Triangle-Measure

1) On a class of $O(n^2)$ problems in computational geometry, A.Gajentaan, M.H.Overmars

http://media.journals.elsevier.com/content/files/2011winnercomgeo-24033200.pdf

2) Wikipedia: 3SUM

https://en.wikipedia.org/wiki/3SUM

3) 3SUM-hardness

http://www2.cs.uni-paderborn.de/cs/ag-madh/vorl/Perlen/BASILB.pdf