Amortisierte Laufzeitanalyse

Nouzad Mohammad

Paris-Lodron Universität Salzburg

24 Januar, 2014

Inhaltsverzeichnis

Definition

- Die amortisierte Laufzeitanalyse betrachtet die durchschnittlichen Kosten von Operationen in Folgen
- Unterschiede zur der Allgemeinen Analyse
- Die amortisierte Analyse wird eingesetzt zur Analyse von Operationen in Datenstrukturen.

Beispiel:Stapeloperationen

- Unser Stapel besitzt die folgenden Operationen: $PUSH(S,x), POP(S), MULTIPOP(S,k), STACK-EMPTY(S)$
- MULTIPOP (S,k) :
  - while not STACK-EMPTY(S) und $k \neq 0$
  - do $POP(S); k = k - 1$
- Laufzeit auf Sequenz von N Operationen?
  - im worst case: $MULTIPOP(S,k) \rightarrow O(N)$
  - insgesamt: $O(N_2)$

Beispiel: Binärzähler (1/2)

- Wollen $k - Bit$ Zähler implementieren, der bei 0 beginnt
- Realisieren Zähler durch ein $k - elementiges$ Array $A[0..k-1]$ von Bits. Niedrigstes Bit in $A[0]$ und höchstes Bit in $A[k-1]$ gespeichert
- Array stellt damit zu jedem Zeitpunkt Zahl

$$x = \sum_{i=0}^{k-1} A[i]2^i$$

Beispiel: Binärzähler (2/2)

- INCREMENT (A)
  - $i = 0$
  - while i<laenge $[A]$ und $A[i] = 1$
  - do $A[i] = 0; i = i + 1$
- Laufzeit auf Sequenz von N Operationen?
  - im worst case: $INCREMENT(A) \rightarrow$ dauert $\theta(N)$
  - insgesamt: $O(kN)$

Aggregat-Methode

- Wird versucht die durchschnittlichen Kosten einer Einzeloperation zu ermitteln.
- Indem man die Gesamtkosten aller Operationen ermittelt und dann durch die Anzahl der Operationen dividiert.

Analyse der Stack mittels Aggregat

- Folge von N PUSH, POP und MULTIPOP Operationen kann höchstens O(N) kosten
- Die Gesamtzeit einer Sequenz ist also O(N)
- Die amortisierten Kosten aller drei Stapel-operationen sind somit O(1)

Account-Methode

- für jede Operation amortisierte Kosten
- Die Differenz speziellen Objekten in der Datenstruktur als Kredit zugewiesen
- tatsächlichen Kosten kleinerGleich amortisierten Kosten

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \leq \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Analyse der Stack mittels Account Mtd.

- Zuordnung der Kosten:

Operation	tatsächliche Kosten	amortisierte Kosten
PUSH(S,x)	1	2
POP(S)	1	0
MULTIPOP(S,k)	min(k,s)	0

- jede Operation in der Sequenz ist bezahlbar ?

Analyse der Zähler mittels Account Mtd.

- Zuordnung der Kosten:
  - die amortisierten Kosten der Flips von 0 auf 1 auf 2 gesetzt. Für den Flip von 1 auf 0 sind die amortisierten Kosten 0.
- jede Operation in der Sequenz ist bezahlbar ?

Potentialmethode (1/3)

- Wie bei der Buchhaltungsmethode werden Kosten im voraus bezahlt
- Die im Voraus bezahlten Kosten sind im so genannten Potential einer Datenstruktur gesammelt
- Potenzialfunktion zu Beginn gleich 0 und danach immer nicht-negativ

Potentialmethode (2/3

- Funktion ϕ bildet jede Datenstruktur D_i auf eine reelle Zahl ϕ_i ab, die dem Potenzial entspricht
- amortisierte Kosten : $a_i = t_i + \phi_i - \phi_{i-1}$
- Sei $O1, ..., On$ eine Folge von n Operationen

Potentialmethode (3/3)

- Summe der amortisierten Kosten

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} (t_i + \phi_i - \phi_{i-1}) = \phi_n - \phi_0 + \sum_{i=1}^{n} t_i$$

- Das Vorgehen:
  - Potenzialfunktion wählen

$$\phi_n - \phi_0 \geqslant 0 \text{ und damit } \sum_{i=1}^{n} t_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Analyse der Stack mittels Potenzial mtd.

- Zuordnung der Potenzialfunktion: $\phi_0 = 0$
- Amortisierte Kosten für $PUSH(S, x)$:
  - Potenzialdifferenz:
  $$\phi_i - \phi_{i-1} = (s+1) - s = 1$$
  - Amortisierte Kosten:
  $$a_i = t_i + \phi_i - \phi_{i-1} = 1 + 1 = 2$$
- Amortisierte Kosten für $MULTIPOP(S, k)$:
  - Potenzialdifferenz:
  $$\phi_i - \phi_{i-1} = k'$$
  - Amortisierte Kosten:
  $$a_i = t_i + \phi_i - \phi_{i-1} = k' - k' = 0$$

Quellen

- http://de.wikipedia.org/wiki/AmortisierteLaufzeitanalyse
- http://i11www.iti.uni-karlsruhe.de/_media/teaching/winter2006/algotech/skript.pdf
- T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R. Rivest, C. Stein: Algorithmen – Eine Einführung, Oldenbourg, 2004