Exaktes Geometrisches Rechnen

Theresa Leitner, Fridolin Einböck

20.01.2012

Überblick

- Was ist Geometrie?
- Was ist Exaktes geometrisches Rechnen?
  - Geometrische Berechnung
  - Das Null-Problem
  - Präzisions-gesteuerte Auswertung

Was ist Geometrie?

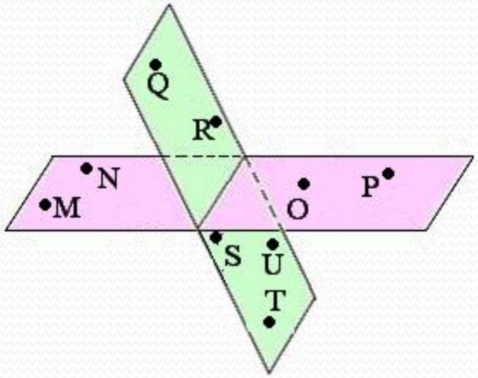
- Geometrische Objekte
- Gemeinsames Merkmal
- Räumliche Beziehungen
  - Innen / außen
  - Zerlegen/ schneiden
  - Berühren …

Beispiele für räumliche Beziehungen 1

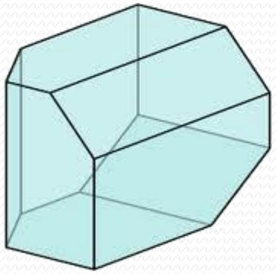
- Ein Punkt kann in einem Polytop sein.
- Eine Zeile kann auf einer Hyperebene liegen, parallel zu ihr sein oder sie schneiden.
- Drei Punkte können kollinear sein.

Beispiele für räumliche Beziehungen 2

- In 3 Dimensionen oder mehr, können vier Punkte koplanar liegen und deswegen können sie auch zusammen-kreisförmig sein.

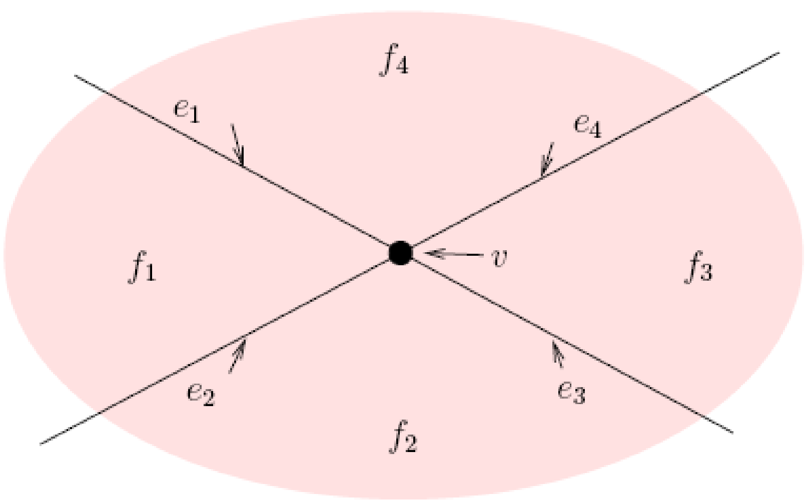


- Zwei Seiten eines Polytop können benachbart zueinander sind.

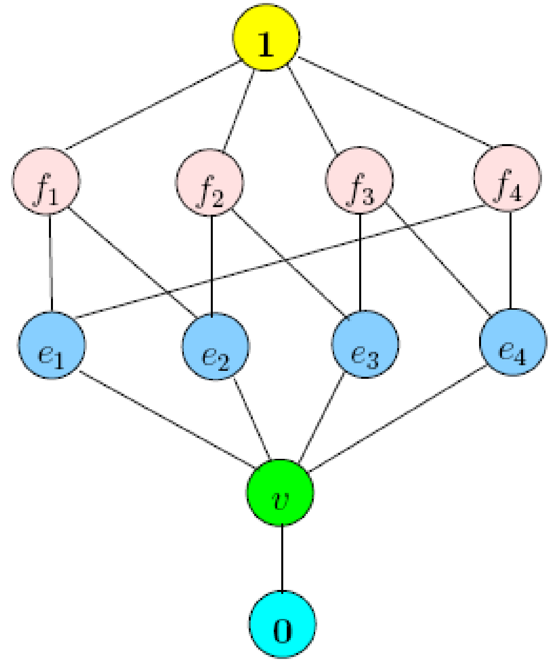


Räumliche Beziehungen

- Numerisch definiert
- Kombinatorische Strukturen
  - Zum Beispiel definieren eine Sammlung von Punkten ein konvexes Polytop



f4
e1
e4
f1
v
f3
e2
e3
f2



1
f1
f2
f3
f4
e1
e2
e3
e4
v
0

Was ist exakt geometrisch Rechnen?

- „unendlich verzweigten Baum T“
  - Konstruktionsschritt
    - $x \leftarrow x + 1;$
      $x \leftarrow f(y, z);$
  - Verzweigungsschritt

    if $z \geq 0$ *then go to* $L;$

    …

    $L: \cdot \quad \cdot \quad \cdot$

Geometrische Berechnung

- „go-to“ Aussagen werden in Case-Aussagen, While Schleifen usw. verpackt
- Programm selbst → endliche Menge von Anweisungen
- Drei-Weg-Verzweigung
  - z.B.: Zu Berechnen ist ein Punkt in, außerhalb oder auf einem Dreieck? Ist die Fläche eines Dreiecks 0, positive oder negative?

Geometrische Berechnung - Kategorien

- Konstruieren geometrischer Komplexe
- Ableiten geometrischer Beziehung zw. den geometrischen Komplexe
- Geometrische Benutzer-Komplexe

Geometrische Berechnung

- T unendlich
- Anhalten Berechnungen → "Weg von der Wurzel zu einem Blatt"
- geometrisches Objekt $OBJ\ (y_1, \ldots, y_k)$
  - Parameter Ausgang $y_1, \ldots, y_k$
  - Parameter Eingabe $x = (x_1, \ldots, x_n) \rightarrow y_i = y_i\ (x)$

Geometrische Berechnung

- allgemeine Schlussfolgerung: wenn sicher ist, dass jeder Zweig korrekt ist, wird eine richtige kombinatorische Struktur garantieren.
- EGC: Es ist zu gewährleisten, dass alle Zweige für einen Rechenweg richtig sind.

Das Null-Problem

- $yi = yi\ (x)$ sind ungefähre Angaben
- Prüfwerte $z = z\ (x)$
- zentrale Problem → Zeichen Problem
  - Zeichen für eine numerische Konstante z
- Problem reduzieren:
  - zu entscheiden, ob $z\ (x) = 0$
- Wenn z sich als nicht Null erweist
  - $z > 0$ *oder* $z < 0$

Präzisions-gesteuerte Auswertung

- Lösung: alle numerischen Werte bestimmen
- weitere Schwierigkeit: Mit welcher Genauigkeit, soll jeder Zahlenwert an z angenähert werden!

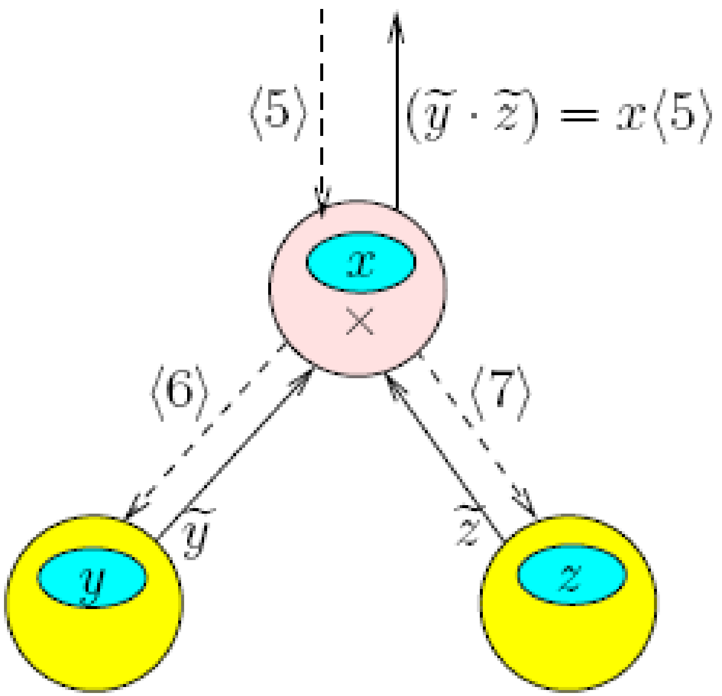
Präzisions-gesteuerte Auswertung 2

- Bsp.: alle unsere Berechnungen wurden mit "100 Bits relative Genauigkeit" durchgeführt,
und/oder ein bestimmter Richtwert $\tilde{z}$ hat "100 Bits der absoluten Fehler"

Präzisions-gesteuerte Auswertung 3

- Allgemeine Lösung:
  - Speicherung des Ausdrucks *extire z (x)* für jede numerische Größe *z*
  - Durchführung: jeden Knoten *u* in einem Ausdruck betrachten
  - Falls *u* ein innerer Knoten ist → Operation *op (u)*

Präzisions-gesteuerte Auswertung 4



Präzisions-gesteuerte Auswertung 5

- Angenommen: *x* zu *p-Bits* berechnen.
- Wenn: *p +1-Bits* relative Genauigkeit von *y* und *p + 2-Bits* der relativen Genauigkeit von *z*

$$x = yz, \quad \widetilde{y} = y\langle n+1\rangle, \quad \widetilde{z} = z\langle n+2\rangle. \Rightarrow .\widetilde{y}\cdot\widetilde{z} = x\langle n\rangle$$

- Man erhält: genaue Multiplikation der Näherungswerte für das gewünschte Ergebnis *x*

$$x = y + z, \quad \widetilde{y} = y[n+1], \quad \widetilde{z} = z[n+1]. \Rightarrow .\widetilde{y} + \widetilde{z} = x[n]$$

Präzisions-gesteuerte Auswertung 6

- ähnliche Regel, zusätzlich zur absoluten Genauigkeit:

$$x = y + z, \quad \widetilde{y} = y[n+1], \quad \widetilde{z} = z[n+1]. \Rightarrow .\widetilde{y} + \widetilde{z} = x[n]$$

- Weitere Regel für die Addition mit relativer Fehler:

$$\pm, \times, \div, \sqrt{\cdot}, \exp, \log$$

- Angenommen: E_z Ausdruck für z
  - Ez enthält die Input-Parameter $x = (x1, \ldots, xn)$

Danke für Ihre Aufmerksamkeit!