

PARADOXA

Alexander Rothschadl / Christian Polt

21. Jänner 2011

Definition

Paradoxon: Scheinbarer oder tatsächlich unauflösbarer, unerwarteter Widerspruch.

Formen des Paradoxons:

- **Antinomie:** Zueinander im Widerspruch stehende Aussagen können beide gleichermaßen begründet werden ($A \wedge \neg A$).
- **Schein-Paradoxon:** Intuitive und exakte Lösung stimmen nicht überein (Exakte Lösung des Problems widerspricht der intuitiven Vorstellung).
- **Zweideutiges Paradoxon:** Verschiedene Betrachtungsweisen führen zu verschiedenen Lösungen.

RUSSELLSCHE ANTINOMIE

- Die Russellsche Antinomie wurde 1903 von Bertrand Russell publiziert.
- Es handelt sich um ein Paradoxon aus dem Bereich der Logik und deckte seinerzeit eine Unstimmigkeit in der Definition der Mengen auf.
- Die Publikation der Russellschen Antinomie führte zur sogenannten **Grundlagenkrise der Mathematik**.

Vorbereitung

Eine Menge M , die sich nicht selbst als Element enthält, heiße *normal*. Andernfalls heiße sie *abnormal*.

Formal: M normal $:\Leftrightarrow M \notin M$ bzw. M abnormal $:\Leftrightarrow M \in M$.

Beispiel

Sei $A = \{M: |M| < \infty\}$ die Menge aller endlichen Mengen. Die Menge A selbst ist keine endliche Menge und demnach kein Element von A . A ist also normal, da $A \notin A$ ist.

Sei $B = \{M: |M| = \infty\}$ die Menge aller unendlichen Mengen. Die Menge B selbst ist ebenfalls eine unendliche Menge und deshalb ein Element von B . B ist also abnormal, da $B \in B$ ist.

Russellsche Antinomie

Russellsche Antinomie (Bertrand Russell, 1903)

Sei $R := \{X : X \notin X\}$ die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten, also die Menge aller normalen Mengen. Falls

- $R \in R$: Dann gilt aufgrund der Definition von R , dass $R \notin R$, d.h. $R \in R \Rightarrow R \notin R$.
- $R \notin R$: Dann erfüllt R die Eigenschaft der definierten Menge R und ist deshalb in ihr enthalten, d.h. $R \notin R \Rightarrow R \in R$.

Es gilt also die widersprüchliche Beziehung $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$.

SIMPSON-PARADOXON

- Das Simpson-Paradoxon wurde erstmals von Edward Hugh Simpson im Jahr 1951 untersucht.
- Es handelt sich um ein Paradoxon aus dem Bereich der Statistik.
- Wir erläutern den Sachverhalt anhand eines Beispiels.

Beispiel (Teil 1)

Es ist wieder einmal an der Zeit, eine Informatikprüfung zu schreiben. Für die Prüfung gibt es zwei Termine. Wir wollen sehen, welches Geschlecht besser abschneidet, die Frauen oder die Männer.

Nach den zwei Prüfungsterminen liegt folgendes Ergebnis vor:

Prüfungsergebnisse gesamt			
Geschlecht	Teilgenommen	Bestanden	Quote
Weiblich	18	9	50%
Männlich	18	11	61%

Wir schließen: Die Männer waren besser als die Frauen, oder?

Beispiel (Teil 2)

Betrachten wir die beiden Prüfungstermine gesondert:

Prüfungsergebnisse Termin 1			
Geschlecht	Teilgenommen	Bestanden	Quote
Weiblich	12	4	33%
Männlich	4	1	25%

Prüfungsergebnisse Termin 2			
Geschlecht	Teilgenommen	Bestanden	Quote
Weiblich	6	5	83%
Männlich	14	10	71%

Beispiel (Teil 3)

Wir sehen:

- Die Prüfung am ersten Termin war wohl wesentlich schwieriger als die Prüfung am zweiten Termin.
- Die meisten Frauen haben den ersten Termin wahrgenommen, wohingegen die meisten Männer erst am zweiten Termin teilnahmen.
- Bei beiden Terminen haben die Frauen im Vergleich zu den Männern besser abgeschnitten.

Wir folgern: Die Männer waren nicht besser als die Frauen, die Frauen hatten einfach Pech bei der Wahl des Termins.

Simpson-Paradoxon

Lehre: Das Simpson-Paradoxon tritt oft im Bereich der Sozialwissenschaften auf (z.B. bei Ausländerkriminalitäts-Statistiken). Diese Statistiken sind daher mit Vorsicht zu genießen und kritisch zu hinterfragen.

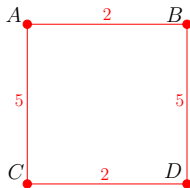
BRAESS-PARADOXON

- Das Braess-Paradoxon wurde 1968 vom deutschen Mathematiker Dietrich Braess veröffentlicht.
- Es handelt sich um ein Paradoxon aus dem Bereich der Verkehrslogistik und beschreibt, wie der Bau einer zusätzlichen Straße zu einer Verschlechterung der Verkehrssituation führen kann.
- Zur Beschreibung des Paradoxons betrachten wir ein vereinfachtes Beispiel.

(Beispiel von Timm Grams, FH Fulda)

Beispiel (Teil 1)

Wir betrachten das durch den folgenden Graphen gegebene Straßennetz.

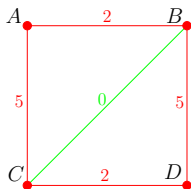


- Die Gewichte an den Kanten bezeichnen die benötigten Fahrtkosten in Euro auf jener Strecke.
- Zwei Autofahrer (X und Y) wollen möglichst billig von A nach D fahren.
- **Falls beide Autofahrer denselben Streckenteil verwenden, werden die Fahrtkosten für beide verdoppelt.**

Beispiel (Teil 2)

- Die beiden Fahrer wählen daher ihre Route klug: X fährt die Strecke ABD und Y fährt die Strecke ACD .
- Beide Fahrer bezahlen Fahrtkosten in der Höhe von 7 Euro.

Der Verkehrsminister baut nun eine Entlastungstrecke von B nach C mit Fahrtkosten 0 Euro.



Beispiel (Teil 3)

- Fahrer X wählt daraufhin die Strecke $ABCD$, da dies seine Fahrtkosten auf 6 Euro senkt.
- Fahrer Y bezahlt nun jedoch 9 Euro für seine Strecke ACD . Er entschließt sich deshalb ebenfalls, die für ihn günstigere Strecke $ABCD$ zu wählen.
- Beide Fahrer bezahlen nun 8 Euro auf der Strecke $ABCD$. Das ist um 1 Euro mehr als sie vor dem Bau der Entlastungsstrecke bezahlt haben.

Braess-Paradoxon in der realen Welt

- 1969 führte in Stuttgart die Eröffnung einer neuen Straße dazu, dass sich in der Umgebung des Schlossplatzes der Verkehrsfluss verschlechterte.
- In New York konnte das umgekehrte Phänomen 1990 beobachtet werden. Eine Sperrung der 42. Straße sorgte für weniger Staus in der Umgebung. aus Wikipedia, Braess-Paradoxon

DREI-TÜREN-PROBLEM

- Das Drei-Türen-Problem (auch Ziegenproblem) ist ein Paradoxon aus der Stochastik.
- Motiviert wurde dieses Problem durch die US-amerikanische Spielshow *Let's make a deal*.

Problemstellung

- In einer Spielshow gilt es, einen Preis zu gewinnen, der sich hinter einer von 3 Türen befindet.
- Es gibt einen Moderator, dem bekannt ist, hinter welcher Tür sich der Preis befindet.
- Der Kandidat wählt zu Beginn eine der 3 Türen aus, hinter der er den Preis vermutet.
- Daraufhin öffnet der Moderator eine Tür, die der Kandidat nicht gewählt hat und hinter der sich kein Preis befindet.
- Nun gibt der Moderator dem Kandidaten die Chance, seine Entscheidung bezüglich seiner gewählten Tür nochmals zu ändern.

Frage: Wie soll sich der Kandidat entscheiden?

Lösung

Wir betrachten folgende zwei Fälle:

1. Fall:

- Gleich zu Beginn wählt der Kandidat zufällig die richtige Tür (natürlich ohne dies zu wissen).
- Daraufhin öffnet der Moderator eine der beiden anderen Türen.
- Würde sich jetzt der Kandidat umentscheiden, so würde er von der richtigen auf die falsche Tür wechseln.
- In diesem Fall ist es also nicht ratsam, die Tür zu wechseln.

Lösung

2. Fall:

- Zu Beginn wählt der Kandidat zufällig eine der beiden falschen Türen.
- Daraufhin öffnet der Moderator die verbleibende falsche Tür.
- Würde sich jetzt der Kandidat nochmals umentscheiden, so würde er von der falschen auf die richtige Tür wechseln.
- In diesem Fall ist es daher gut, die Tür zu wechseln.

Zusammenfassend gilt:

- Tippt der Kandidat zu Beginn auf die richtige Tür, so ist es für ihn schlecht, sich umzuentcheiden.
- Tippt er hingegen auf eine der beiden falschen Türen, so führt ein Wechsel zur anderen Tür zum Preis.
- Da die Wahrscheinlichkeit, zu Beginn eine falsche Tür zu wählen, größer ist (nämlich $\frac{2}{3}$), ist es für den Kandidaten also ratsam, sich umzuentcheiden.