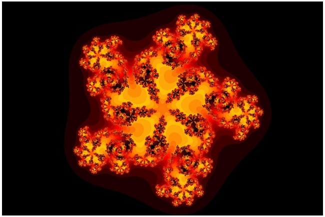
Juliamengen und Mandelbrotmenge

Xin Xu Florian Pausinger

18. Januar 2008



Inhaltsverzeichnis

Über komplexe Zahlen

- Seien $\alpha = a + i \cdot b$, $\beta = c + i \cdot d$ komplexe Zahlen.
- Dann gelten:
  - $\alpha \cdot \beta := (a + ib) \cdot (c + id) = ac - bd + i(ad + bc)$ und

Über komplexe Zahlen

- Seien $\alpha = a + i \cdot b$, $\beta = c + i \cdot d$ komplexe Zahlen.
- Dann gelten:
  - $\alpha \cdot \beta := (a + ib) \cdot (c + id) = ac - bd + i(ad + bc)$ und
  - $|\alpha| := \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Der Betrag entspricht also dem Abstand der Zahl zum Ursprung in der komplexen Zahlenebene.

Über komplexe Zahlen

- Seien $\alpha = a + i \cdot b$, $\beta = c + i \cdot d$ komplexe Zahlen.
- Dann gelten:
  - $\alpha \cdot \beta := (a + ib) \cdot (c + id) = ac - bd + i(ad + bc)$ und
  - $|\alpha| := \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Der Betrag entspricht also dem Abstand der Zahl zum Ursprung in der komplexen Zahlenebene.
- Darstellung in Polarkoordinaten: $\alpha = |\alpha| \exp^{(i\phi)}$

Über komplexe Zahlen

- Seien $\alpha = a + i \cdot b$, $\beta = c + i \cdot d$ komplexe Zahlen.
- Dann gelten:
  - $\alpha \cdot \beta := (a + ib) \cdot (c + id) = ac - bd + i(ad + bc)$ und
  - $|\alpha| := \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Der Betrag entspricht also dem Abstand der Zahl zum Ursprung in der komplexen Zahlenebene.
- Darstellung in Polarkoordinaten: $\alpha = |\alpha| \exp^{(i\phi)}$

Iterationen und beschränkte Folgen

Definition (Iteration)

Unter einer Iteration wird im weiteren die wiederholte Ausführung einer Funktion f auf einen Startwert z_0 verstanden, z.b. $f^3 := f(f(f(z_0)))$.

Definition (Beschränkte Folge)

Eine Folge $(a_n)_0^\infty$ heißt beschränkt, wenn gilt $|a_n| \leq C$ für alle $n \geq 0$ mit $n, C \in \mathbb{N}$.

Iterationen und beschränkte Folgen

Definition (Iteration)

Unter einer Iteration wird im weiteren die wiederholte Ausführung einer Funktion f auf einen Startwert z_0 verstanden, z.b. $f^3 := f(f(f(z_0)))$.

Definition (Beschränkte Folge)

Eine Folge $(a_n)_0^\infty$ heißt beschränkt, wenn gilt $|a_n| \leq C$ für alle $n \geq 0$ mit $n, C \in \mathbb{N}$.

Ein Beispiel

- Es seien $z_0 \epsilon \mathbb{C}$ und $f(z) := z^2$.
- Dann gilt: $f^k(z_0) = z_0^{2^k} = |z_0|^{2^k} \exp^{i2^k\phi}$

Ein Beispiel

- Es seien $z_0 \epsilon \mathbb{C}$ und $f(z) := z^2$.
- Dann gilt: $f^k(z_0) = z_0^{2^k} = |z_0|^{2^k} \exp^{i2^k\phi}$
- In Abhängigkeit von z_0 gibt es drei verschiedene Verhaltensmuster der Iterationsfolgen:

Ein Beispiel

- Es seien $z_0 \epsilon \mathbb{C}$ und $f(z) := z^2$.
- Dann gilt: $f^k(z_0) = z_0^{2^k} = |z_0|^{2^k} \exp^{i2^k\phi}$
- In Abhängigkeit von z_0 gibt es drei verschiedene Verhaltensmuster der Iterationsfolgen:
  - $|z_0| = 1$: Es ist $f^k(z_0) = z_0^{2^k} = \exp^{i2^k\phi}$.

Ein Beispiel

- Es seien $z_0 \epsilon \mathbb{C}$ und $f(z) := z^2$.
- Dann gilt: $f^k(z_0) = z_0^{2^k} = |z_0|^{2^k} \exp^{i2^k\phi}$
- In Abhängigkeit von z_0 gibt es drei verschiedene Verhaltensmuster der Iterationsfolgen:
  - $|z_0| = 1$: Es ist $f^k(z_0) = z_0^{2^k} = \exp^{i2^k\phi}$.
  - $|z_0| < 1$: Wegen $|z_0|^{2^k} \to 0$, gilt: $\lim_{k\to\infty} f^k(z_0) = 0$

Ein Beispiel

- Es seien $z_0 \epsilon \mathbb{C}$ und $f(z) := z^2$.
- Dann gilt: $f^k(z_0) = z_0^{2^k} = |z_0|^{2^k} \exp^{i2^k\phi}$
- In Abhängigkeit von z_0 gibt es drei verschiedene Verhaltensmuster der Iterationsfolgen:
  - $|z_0| = 1$: Es ist $f^k(z_0) = z_0^{2^{\boldsymbol{k}}} = \exp^{i2^{\boldsymbol{k}}\phi}$.
  - $|z_0| < 1$: Wegen $|z_0|^{2^{\boldsymbol{k}}} \to 0$, gilt: $\lim\limits_{k\to\infty} f^k(z_0) = 0$
  - $|z_0| > 1$: Wegen $|z_0|^{2^k} \to \infty$, gilt: $\lim\limits_{k\to\infty} f^k(z_0) = \infty$

Ein Beispiel

- Es seien $z_0 \in \mathbb{C}$ und $f(z) := z^2$.
- Dann gilt: $f^k(z_0) = z_0^{2^k} = |z_0|^{2^k} \exp^{i2^k\phi}$
- In Abhängigkeit von z_0 gibt es drei verschiedene Verhaltensmuster der Iterationsfolgen:
  - $|z_0| = 1$: Es ist $f^k(z_0) = z_0^{2^k} = \exp^{i2^k\phi}$.
  - $|z_0| < 1$: Wegen $|z_0|^{2^k} \to 0$, gilt: $\lim\limits_{k\to\infty} f^k(z_0) = 0$
  - $|z_0| > 1$: Wegen $|z_0|^{2^k} \to \infty$, gilt: $\lim\limits_{k\to\infty} f^k(z_0) = \infty$

Was ist eine Juliamenge?

Definition (Juliamenge)

Sei f ein Polynom vom Grad ≥ 2. Die Menge derjenigen Anfangswerte $z \in \mathbb{C}$ für welche die Iterationsfolge $f^k(z)$ beschränkt bleibt, heißt ausgefüllte Julia-Menge von f. Bezeichnung: $K(f)$. Der Rand von $K(f)$ wird mit $J(f)$ bezeichnet und heißt Julia-Menge von f.

Fortsetzung des Beispiels

- Durch Addition eines komplexen Parameters ensteht aus der vorher betrachteten Funktion f die quadratische Familie $f_c(z) := z^2 + c$.
- Für $c = 0$ kennen wir bereits das dynamische Verhalten der Iterationsfolgen und damit die zugehörige Juliamenge.

Fortsetzung des Beispiels

- Durch Addition eines komplexen Parameters ensteht aus der vorher betrachteten Funktion f die quadratische Familie $f_c(z) := z^2 + c$.
- Für $c = 0$ kennen wir bereits das dynamische Verhalten der Iterationsfolgen und damit die zugehörige Juliamenge.
- Wie verändert sich nun das Aussehen dieser Menge durch die Addition eines komplexen Parameters c?

Fortsetzung des Beispiels

- Durch Addition eines komplexen Parameters ensteht aus der vorher betrachteten Funktion f die quadratische Familie $f_c(z) := z^2 + c$.
- Für $c = 0$ kennen wir bereits das dynamische Verhalten der Iterationsfolgen und damit die zugehörige Juliamenge.
- Wie verändert sich nun das Aussehen dieser Menge durch die Addition eines komplexen Parameters c?

Juliamengen

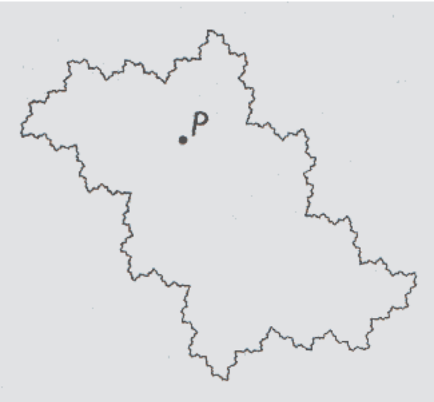


Abbildung: Juliamenge für $c = -0,12375 + 0,56508i$

Juliamengen

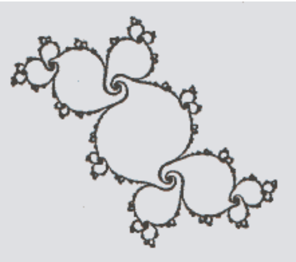


Abbildung: Juliamenge für $c = -0.11 + 0,6557i$

Juliamengen

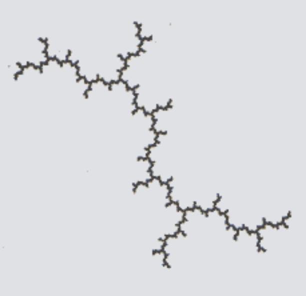


Abbildung: Juliamenge für $c = i$

Juliamengen

Abbildung: Juliamenge für $c = 0,11031 - 0,67037i$

Systematisch? Chaotisch?

- Die Bilder lassen eine grobe Einteilung der Julia-Mengen in zusammenhängende und auseinanderfallende Mengen vermuten.
- Doch wann zeigt eine Julia-Menge welches Verhalten? Kann man Vorhersagen darüber treffen?

Systematisch? Chaotisch?

- Die Bilder lassen eine grobe Einteilung der Julia-Mengen in zusammenhängende und auseinanderfallende Mengen vermuten.
- Doch wann zeigt eine Julia-Menge welches Verhalten? Kann man Vorhersagen darüber treffen?
- ???

Systematisch? Chaotisch?

- Die Bilder lassen eine grobe Einteilung der Julia-Mengen in zusammenhängende und auseinanderfallende Mengen vermuten.
- Doch wann zeigt eine Julia-Menge welches Verhalten? Kann man Vorhersagen darüber treffen?
- ???
- Antworten auf diese Fragen lieferte Benoit Mandelbrot um 1980!

Systematisch? Chaotisch?

- Die Bilder lassen eine grobe Einteilung der Julia-Mengen in zusammenhängende und auseinanderfallende Mengen vermuten.
- Doch wann zeigt eine Julia-Menge welches Verhalten? Kann man Vorhersagen darüber treffen?
- ???
- Antworten auf diese Fragen lieferte Benoit Mandelbrot um 1980!

Die Mandelbrotmenge

Definition (Mandelbrotmenge)

Die Menge aller c-Werte für die $K(f_c)$ zusammenhängend ist heißt Mandelbrotmenge M_f.

Charakterisierung

- Folgender Satz ermöglicht eine Charakterisierung der Elemente der Mandelbrot-Menge:

Satz

Eine ausgefüllte Juliamenge $K(f_c)$ ist genau dann zusammenhängend, wenn sie c enthält.

Charakterisierung

- Folgender Satz ermöglicht eine Charakterisierung der Elemente der Mandelbrot-Menge:

Satz

Eine ausgefüllte Juliamenge $K(f_c)$ ist genau dann zusammenhängend, wenn sie c enthält.

- Weiters kann man zeigen, dass das dynamische Verhalten von f_c und die Struktur der Julia-Menge $K(f_c)$ wesentlich dadurch bestimmt werden, in welchem Teil der Mandelbrotmenge der Parameter c liegt.

Charakterisierung

- Folgender Satz ermöglicht eine Charakterisierung der Elemente der Mandelbrot-Menge:

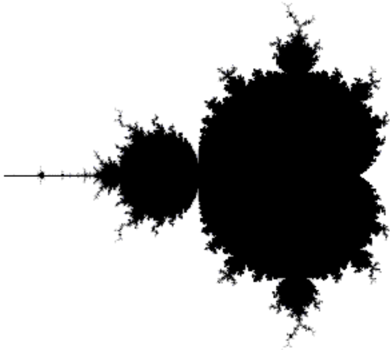
Satz

Eine ausgefüllte Juliamenge $K(f_c)$ ist genau dann zusammenhängend, wenn sie c enthält.

- Weiters kann man zeigen, dass das dynamische Verhalten von f_c und die Struktur der Julia-Menge $K(f_c)$ wesentlich dadurch bestimmt werden, in welchem Teil der Mandelbrotmenge der Parameter c liegt.

Mandelbrotmenge unseres Beispiels

Für unser Beispiel ergibt sich als Mandelbrotmenge folgende als Apfelmännchen bekannt gewordene Abbildung:



Verwendete Literatur

- Dufner, Roser, Unseld: Fraktale und Julia-Mengen. Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt/Main, 1998.
- Jürgen Kummer: Die Juliamengen und die Mandelbrotmenge. Online unter: http://jumk.de/facharbeit/anmerkungen.html [Stand 10.1.2008]
- Titelbild von http://de.wikipedia.org/wiki/Bild:Juliamenge-hoch-5.JPG [Stand 14.1.2008]
- Weitere Bilder entnommen aus: Peitgen, Richter: The Beauty of Fractals. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1986.

Wir danken für eure Aufmerksamkeit!