Traveling Salesman Problem (TSP)

Präsentation von Burku, Kienzerle, Stollnberger

Inhalt

- Allgemeine Problembeschreibung
- Historie
- Mathematische Beschreibung
- Algorithmische Komplexität
- Beispiel Symmetrisches TSP
- Lösungsverfahren
- Praktische Grenzen der Berechenbarkeit
- Varianten und Anwendungen
- Literaturnachweis

Allgemeine Problembeschreibung

Abbildung 1

- Reihenfolge für den Besuch mehrerer Orte
- Gesamte Reisestrecke möglichst kurz

Historie

- Erstmalige Erwähnung undokumentiert
- 1832: Handbuch für Handlungsreisende
- 19 Jhdt: Icosian Game von William Rowan Hamilton
- 1930: explizite Erwähnung als mathematisches Optimierungsproblem durch Karl Menger
- Ab 1950: Gewinnt an wissenschaftlicher Popularität

Mathematische Beschreibung (I)

- Modellierung als Graph

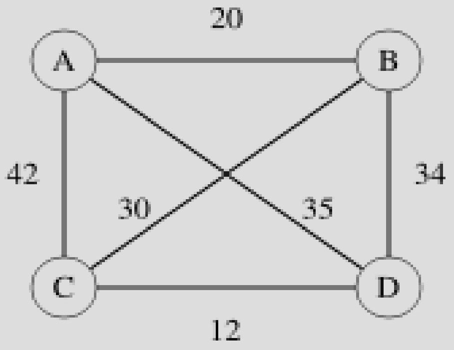

Abbildung 2

- Darstellung als ungerichteter Graph (Symmetrisch)
- oder gerichteter Graph (Asymmetrisch)

- Metrisches TSP: $c_{AD} \leqslant c_{AC} + c_{CD}$

Mathematische Beschreibung (II)

- Formulierung als ganzzahliges lineares Programm:

(a) $$\sum_{j \in V \setminus \{i\}} x_{ij} = 2$$

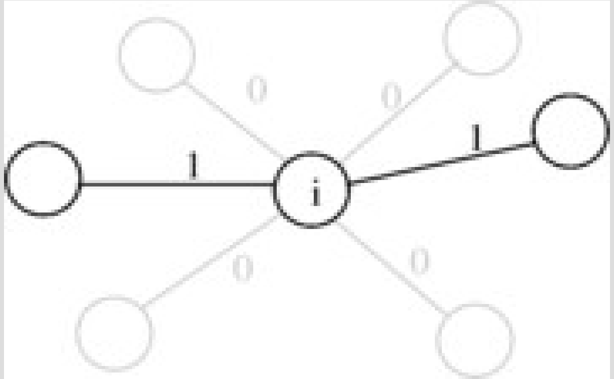

Abbildung 3

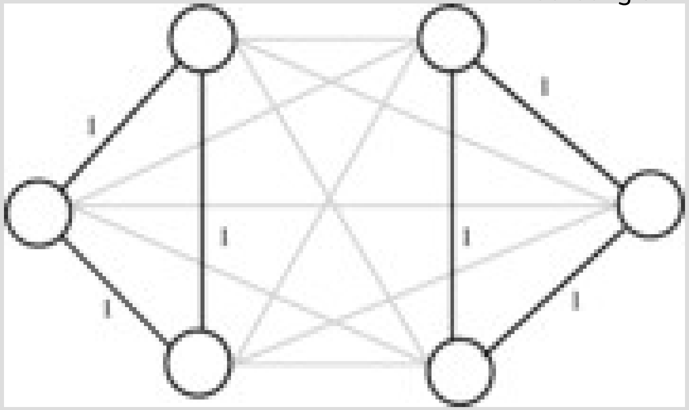

Abbildung 4

(b) $$\sum_{i \in S,\, j \notin S} x_{ij} \geqslant 2$$

Mathematische Beschreibung (III)

- Finde:

$$\left(min\left\{\sum_{(i\in V)}\sum_{(j\in V\setminus\{i\})} c_{ij}\, x_{ij} \middle| x\, erfüllt\,(a)\, und\,(b),\, x_{ij}\in\{0,1\}\right\}\right)$$

Algorithmische Komplexität

- gerichteten Wege (asym): $(n-1)!$
- ungerichtete Wege (sym): $\frac{(n-1)!}{2}$

Beispiel: Symmetrisches TSP

- Annahme, Reise durch 15 größten Städte Deutschlands. Möglichkeiten?
- $$\frac{(n-1)!}{2}$$
- $$\frac{(15-1)!}{2}=43.589.145.600$$

Abbildung 5

Lösungsverfahren

- Bekannte Lösungsverfahren unterteilen sich in:
  - (1) Exakte Lösungsverfahren
  - (2) Heuristiken
    - a) Eröffnungsverfahren
    - b) Verbesserungsverfahren
    - c) Metaheuristische Verfahren
    - d) Duale Heuristiken
- (1) und (2) können kombiniert werden

Exakte Lösungsverfahren („Holzhammer-Methode“)

- Liefert beweisbare Optimallösung (beliebig lange Laufzeit vorausgesetzt)
- Oft nicht mehr praktisch durchführbar
  - Bsp:

Städte	mögliche Rundreisen	Laufzeit	
3	1	1	msec
4	3	3	msec
5	12	6	msec
6	60	60	msec
7	360	360	msec
8	2.520	2,5	sec
9	20.160	20	sec
10	181.440	3	min
11	1.814.400	0,5	Stunden
12	19.958.400	5,5	Stunden
13	239.500.800	2,8	Tage
14	3.113.510.400	36	Tage
15	43.589.145.600	1,3	Jahre
16	653.837.184.000	**20**	**Jahre**

Abbildung 6

„Holzhammer“ - Methode in Java (mit Dreiecksungleichung)

```
// Picks the best triangle
for(int i = 0; i < numVertices; i++){
    for(int j = 0; j < i; j++){
        for(int k = 0; k < j; k++)
            {

            if((getWeight(i, j) != null) && (getWeight(j, k) != null) &&
                (getWeight(i, k) != null))

                {

currentDistance = getWeight(i, j).doubleValue() + getWeight(j, k).doubleValue() +
                getWeight(i, k).doubleValue();

                if(currentDistance  < currentBestDistance)
                {
                    greedy[0] = i;
                    greedy[1] = j;
                    greedy[2] = k;
                    currentBestDistance = currentDistance;
                }
            }
        }
    }
}
```

Auszug: Eröffnungsverfahren (Heuristik)

- Prinizp des „Nearest Neighbour Heuristic“
  - Sucht immer den nächstliegendsten Nachbarn
  - Setzt dies sukzessive fort
  - Eigenschaften:
    - „schnelle Ausführung“
    - „Ergebnis nicht zwangsläufig optimal“
    - Komplexität: $O(n^2)$

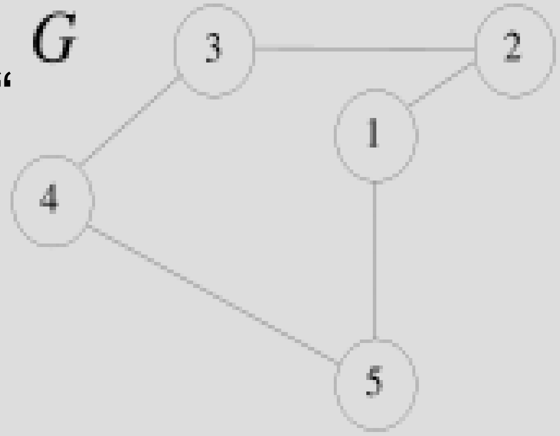

Abbildung 7

Praktische Grenzen der Berechenbarkeit

- 2004, William Cook: 24.978 „schwedische Städtereise“
- 2005, William Cook: 33.810 integrierte Schaltkreise
- ~2005-08, William Cook: 526 Millionen Sterne (Distanztoleranz: 0,798 %)

Varianten und Anwendungen (Auszug)

- Mehrere Handlungsreisende
- Änderungen des Optimierungskriteriums
- Zusätzliche Nebenbedingungen

Einzelnachweise / Literatur

- William Cook, Daniel Espinoza, Marcos Goycoolea: Computing with Domino-Parity Inequalities for the TSP. 2005. (Preprint, pdf)
- David Applegate, Robert Bixby, Vašek Chvátal, William Cook: On the Solution of Traveling Salesman Problems. Documenta Mathematica. Extraband 3 zum Internationalen Mathematikerkongress. Berlin 1998, S. 645-656. (Postscript)
- David L. Applegate, Robert E. Bixby, Vašek Chvátal, and William J. Cook: The Traveling Salesman Problem. A Computational Study. Princeton University Press, Februar 2007. ISBN 0-691-12993-2
- Lawler, Lenstra, Rinnooy Kan, Shmoys (Hrsg.): The Traveling Salesman Problem. A Guided Tour of Combinatorial Optimization. Wiley, Chichester 1985. ISBN 0-471-90413-9
- W. Domschke: Logistik - Rundreisen und Touren. Oldenbourg-Verlag, München/Wien 1997 (4. Aufl.). ISBN 3-486-29472-5
- T. Grünert, S. Irnich: Optimierung im Transport. Bd 2. Wege und Touren. Shaker Verlag, Aachen 2005. ISBN 3-8322-4515-4

Bildernachweis

- Abbildung 1)
  http://www.informatik.uni-leipzig.de/~meiler/Schuelerseiten.dir/TBlaszkiewitz/GermanyLRoute.jpg
- Abbildung 2)
  http://de.wikipedia.org/wiki/Bild:Weighted_K4.svg#file
- Abbildung 3)
  http://de.wikipedia.org/wiki/Bild:TSP_degree_constraints.png#file
- Abbildung 4)
  http://de.wikipedia.org/wiki/Bild:TSP_short_cycles.png#file
- Abbildung 5)
  http://de.wikipedia.org/wiki/Bild:TSP_Deutschland_3.PNG#file
- Abbildung 6)
  Tabelle 1 aus http://www-i1.informatik.rwth-aachen.de/~algorithmus/algo40.php
- Abbildung 7)
  http://de.wikipedia.org/wiki/Bild:Nearest_Neighbor_Heuristik.svg
- Abbildung 8)
  http://bp2.blogger.com/_f8xBMTkHOxc/RlPh73XeA7I/AAAAAAAAAM8/q2TBM-c6f2Y/s1600-h/07-05-23_vertreter.jpg

TSP: EM 2008 Österreich/Schweiz

Fragen?

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!

Abbildung 8