

Computersimulation & Mehrkörperproblem

Eine Einführung in die Lösung des Mehrkörperproblems mittels Computersimulation

Gerwin Fleischmann
Daniel Gattringer
Sabine Hösch
Simo Lukic

23.01.2003

- Was ist Computersimulation ?

Nachbildung eines (möglicherweise) in der Realität vorkommenden Szenarios mit Hilfe des Computers unter Anwendung eines Mathematischen Formelwerks und/oder Algorithmen die den zu simulierenden Vorgängen so genau wie möglich entsprechen

- Wozu wird eine Computersimulation verwendet ?

- Die reale Welt am Computer nachbilden
- Verhalten von Objekten vorhersagen
- Tests mit realen Objekten vermeiden um Kosten zu sparen
- Erkenntnisse über Naturwissenschaftliche Vorgänge gewinnen, die mit anderen Methoden nicht problemlos untersuchbar sind.
(Astronomie, Thermodynamik, Vorgänge in molekularen und atomaren Bereichen)
- Im Falle des Mehrkörperproblems: Es ist keine allgemeine Lösung zur Berechnung der Bahnen von mehr als 3 Körpern bekannt.

- Das Gravitationsgesetz

Die Gravitationskraft zwischen zwei Körpern ist definiert als:

$$F = -G \frac{m_1 * m_2}{d_{1-2}^2}$$

Aus dieser Gleichung läßt sich die Beschleunigung eines Körpers berechnen:

$$F_1 = m_1 * a_1 = -G \frac{m_1 * m_2}{d_{1-2}^2}$$

Nimmt man die Position der Bezugsmasse m_2 mit 0 an, kann man schreiben:

$$\vec{a} = -G * \vec{x} * m_2 / r^3 \quad , \text{wobei } x \text{ die Position des Körpers ist.}$$

- Einfacher Algorithmus zum Berechnen der Positionsänderungen

Es wird vorausgesetzt, dass für einen Zeitpunkt t_0 folgendes bekannt ist :

Initiale Geschwindigkeit und Position, die Masse, und der Abstand zum Referenzkörper

Durch die erwähnte Formel erhält man den aktuellen Beschleunigungsvektor:

$$\vec{a} = -G * \vec{x} * m_2 / r^3$$

Wählt man einen endlich kleinen Zeitraum Δt läßt sich die Geschwindigkeit berechnen:

$$\vec{v} = \vec{v} + \Delta t * \vec{a}$$

Wodurch es uns möglich wird, die neue Position des Körpers zu ermitteln:

$$\vec{p} = \vec{p} + \Delta t * \vec{v}$$

Wiederholt man diese Schritte, erhält man eine „relativ“ genaue Simulation der Körperbewegungen.

Integrationsverfahren, Einzelschritt und Mehrschrittverfahren, Schrittweitenregulierung

- Integrationsverfahren

- Problem: Bewegung im Zeitraum Δt ist geradlinig, es entsteht ein Fehler
- Δt kann nicht unendlich klein werden, Rechenleistung ist beschränkt

Bsp.: 1 Mill. Jahre, Simulation schafft 24hr/sec → Benötigt: 11,57 Jahre!

® **Verwendung von Verfahren die den Fehler verringern**

- Schrittweitenregulierung

- Problem: Bewegt sich ein schneller Körper an einem sehr massereichen vorbei, steigt seine Geschwindigkeit enorm, was zur Folge hat, dass sich durch den größeren Weg, den der Körper zurücklegt auch der Fehler vergrößert wird!
- Deshalb: Δt bei hoher Beschleunigung verringern

- Einzelschrittverfahren

Es wird immer nur die aktuelle Position für die Berechnung herangezogen

- Euler Methode
- Taylor Reihen
- Runge – Kutta Methode

- Mehrschrittverfahren

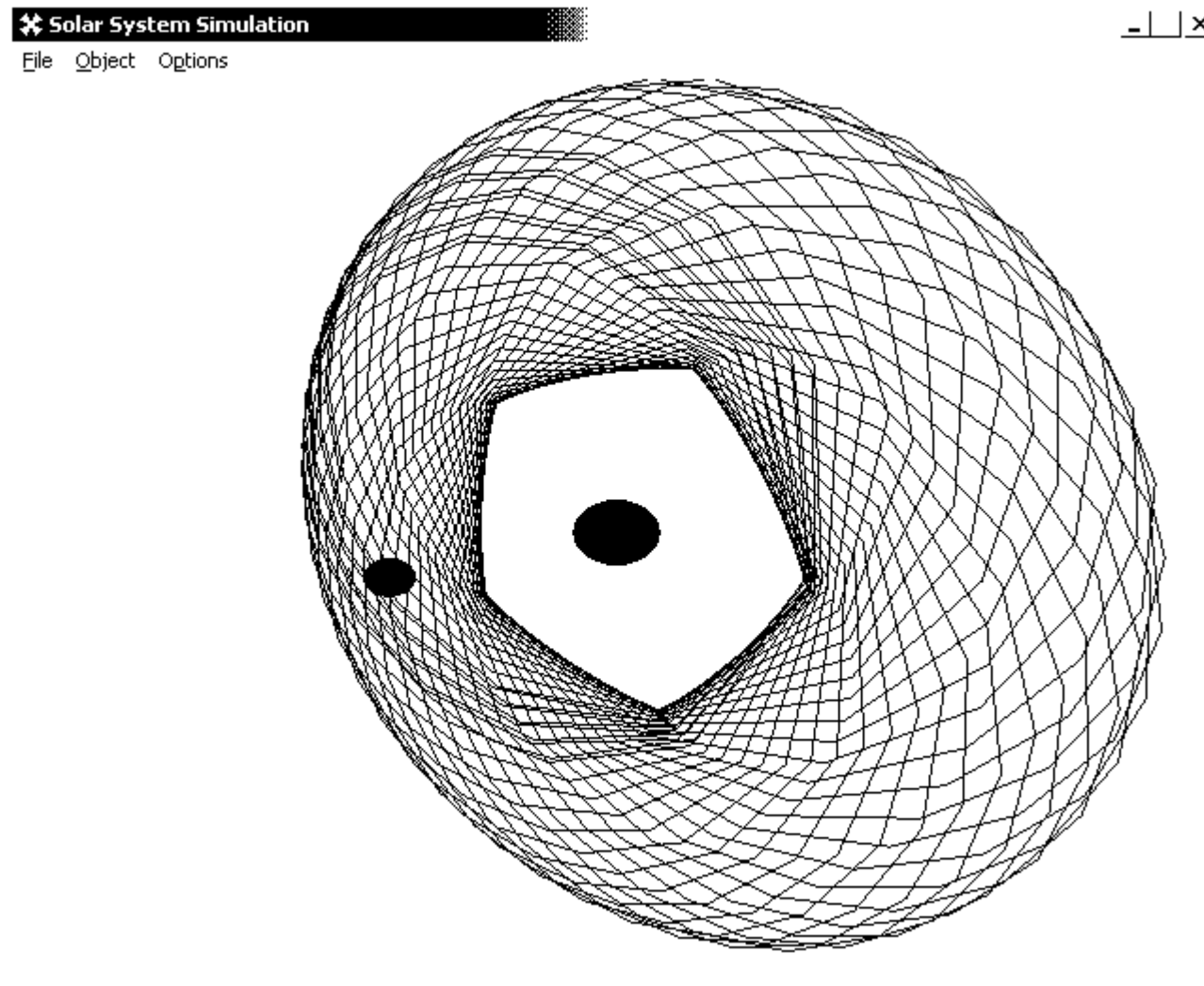
Es werden vorangegangene Positionen zur Berechnung herangezogen

- Modifizierte Taylor Reihen
- Adam – Bashford's Methode

- Predictor – Corrector und andere Verfahren

- Adam – Moulton's Methode
- Gragg – Bulirsch – Stoer Methode

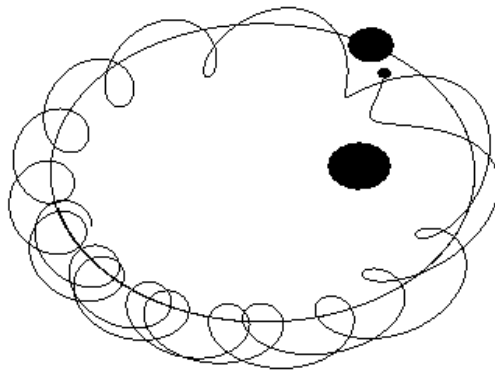
Beispiele (1)



1) Umlaufbahn eines Planeten bei zu großer Schrittweite

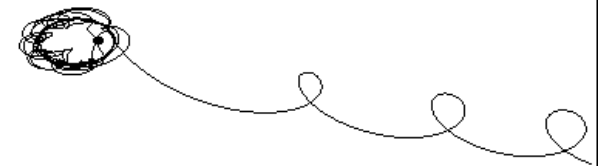
Beispiele (2)

 Solar System Simulation
File Object Options



2.1) Umlaufbahn eines Planeten im
Doppelsternsystem

 Solar System Simulation
File Object Options



2.2) Planet wird aus Doppelsternsystem
geschleudert

- Algorithmen zur Kräfteberechnung zwischen n-Körpern

- Eine Masse wird von allen anderen Massen im System beeinflusst

Die Beschleunigung, bzw. Gravitationskraft relativ zu allen anderen Körpern summiert sich:

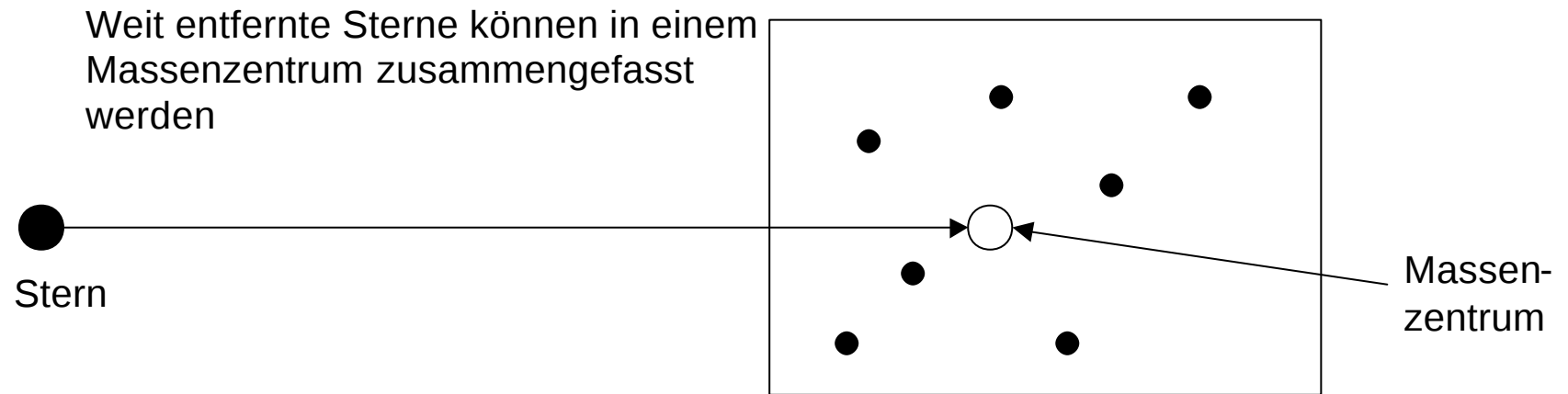
$$\vec{a}_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n -G * \vec{x}_j * m_i / (\vec{x}_j - \vec{x}_i)^3$$

(i, j ∈ I, I...Indexmenge der Körper)

- Es folgt daraus: Jeder Körper muss die Gravitation zu jedem anderen, ausser sich selbst berechnen. Es ergibt sich ein Rechenaufwand von $(n*(n-1))/2 = O(n^2)$
- Für die Berechnung mit extrem vielen Körpern (Sternenhaufen, Galaxien, ...) hat dieser Aufwand enorme Auswirkungen. Es ist nötig bessere Methoden zur Lösung des Mehrkörperproblems zu finden

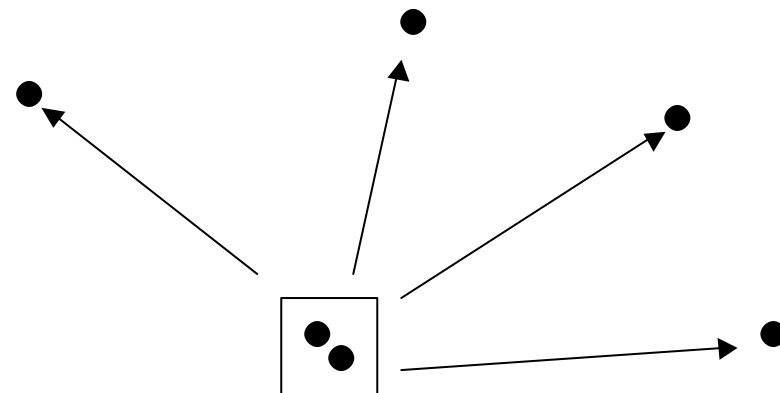
- Bekannte Algorithmen zur Minimierung des Rechenaufwands
 - Particle – Particle
 - Particle – Mesh
 - Particle - Particle / Particle – Mesh
 - Tree - Code Top Down
 - Tree - Code Bottom Up
 - Fast - Multipole – Method
 - Tree - Code Particle – Mesh
 - Self - Consistent Field
 - Symplectic Method

- Zentrale Masse



- Gleichzeitige Bewegung von nahen Körpern

Doppelsternsysteme die einen elliptischen Orbit besitzen, können in einem Schritt bewegt werden



- **Quellverzeichnis / Literaturhinweise**

- Montenbruck, O. Sterne und Weltraum - Grundlagen der Ephemeridenrechnung (München, Verlag Sterne und Weltraum, 1987)
- <http://www.ifa.hawaii.edu/faculty/barnes/> (Joshua Edward Barnes, Hawaii)
- <http://qso.lanl.gov/> (Los Alamos National Laboratory, Theoretical Astrophysics (T-6))
- <http://www.midwestcs.com/xstar/index.html> (Wayne Schlitt, Unix) Februar 13, 2000

- **Programme – Simulationen**

- <http://members.aol.com/akol102408/doku.htm> (Andreas Kollmer, DOS)
- DeepSail (Gerhard Holtkamp, 2001, Freeware, Win32)
- ParticleViewer (<http://www.astro.umd.edu/nemo/amnh>, Peter Teuben, Stuart Levv, 2002, Unix)
- StarLab (<http://www.ids.ias.edu/~starlab/>, Piet Hut (IAS, Princeton) et. al, Unix)