UV Geometrisches Rechnen: Aufgabenblatt 1 für 10.10.2024

Aufgabe 1.1 Nehmen wir an, dass die Auswertung einer Funktion f in konstanter Zeit geschieht, wogegen die Auswertung der Funktion g eine lineare Zeit (relativ zu ihrem Parameter) benötigt. Welche Komplexitäten ergeben sich für die folgenden Schleifen?
a) `for` $(j = 0;\ j < N;\ ++j)\ f(j);$
b) `for` $(j = 0;\ j < N;\ ++j)\ g(j);$
c) `for` $(j = 0;\ j < N;\ ++j)\ g(k);$

Aufgabe 1.2 Jemand hat sich die Mühe gemacht, die Anzahl der Schritte zweier Algorithmen für Inputgröße n exakt zu ermitteln, und hat festgestellt, dass der erste Algorithmus $2n \log_2 n$ viele Schritte benötigt, wogegen der zweite Algorithmus $1024n$ Schritte benötigt, jeweils gleich für den durchschnittlichen Fall und den schlimmsten Fall. Welchen Algorithmus würden Sie verwenden? Warum?

Aufgabe 1.3 Für eine Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ definieren wir

$$O(g) \ := \ \left\{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \mid \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists c \in \mathbb{R}^+ \quad \forall n > n_0 \ : \quad f(n) \leqslant c\, g(n) \right\}.$$

und

$$U(g) \ := \ \left\{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \mid \quad \exists c \in \mathbb{R}_0^+ \quad \lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c \right\}.$$

Welche Mengenrelation gilt zwischen $O(g)$ und $U(g)$?

Aufgabe 1.4 Für $n \in \mathbb{N}$ sei $S_n := \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Weiters bezeichnen wir mit $+_n$ und $\cdot_n$ die Addition und die Multiplikation modulo n. Bildet $(S_n, +_n)$ immer eine Gruppe? Bildet $(S_n, \cdot_n)$ immer eine Gruppe? Bitte begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 1.5 Wir betrachten die Menge $\mathbb{P}_{13}$ aller Primzahlen, die kleiner gleich 13 sind. Auf $\mathbb{P}_{13}$ definieren wir eine binäre Operation $\circ$ als

$$p \circ q := \text{größter Primfaktor von } (p + q - 2).$$

Handelt es sich bei $(\mathbb{P}_{13}, \circ)$ um eine Abelsche Gruppe? Lösen Sie in $(\mathbb{P}_{13}, \circ)$ die Gleichung $5 \circ x = 5$.

UV Geometrisches Rechnen: Aufgabenblatt 2 für 17.10.2024

Aufgabe 2.1 Wir definieren $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ wie folgt:

$$s_n := \begin{cases} \frac{1}{2}\left(s_{n-1} + \frac{5}{s_{n-1}}\right) & \text{falls } n \geqslant 2, \\ 5 & \text{falls } n = 1. \end{cases}$$

Was ergibt sich als $\min\{s_n \colon n \in \mathbb{N}\}$? Was ergibt sich als $\inf\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$?

Aufgabe 2.2 Für $n, d \in \mathbb{N}$ betrachten wir n Punkte $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^d$. Kann man die affine Hülle dieser n Punkten inkrementell berechnen? Gilt also stets

$$AH\big(AH(\{P_1, \ldots, P_{n-1}\}) \cup \{P_n\}\big) = AH(\{P_1, \ldots, P_n\})?$$

Aufgabe 2.3 Unter welchen Bedingungen erhalten wir ganz $\mathbb{R}^2$ als die affine Hülle von drei Punkten $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^2$?

Aufgabe 2.4 Sei M eine Menge und K ein Körper. Muss für alle $a \in M$ jeweils ein $b \in M$ existiert, sodass $a + b = 0$, falls M ein Vektorraum über einem Körper K bildet? Kann man weiters folgern, dass ein derartiges b für jedes $a \in M$ eindeutig bestimmt ist? Warum (nicht)?

Aufgabe 2.5 Seien $a_1, \ldots, a_n$ Vektoren aus einem Vektorraum V über einem Körper F, für ein $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Falls ein Vektor a aus V sich durch zwei verschiedene Linearkombinationen von $a_1, \ldots, a_n$ ausdrücken läßt, dann bilden $a_1, \ldots, a_n$ jedenfalls keine Basis von V.

UV Geometrisches Rechnen: Aufgabenblatt 3 für 24.10.2024

Aufgabe 3.1 In $\mathbb{Q}[x]$ betrachten wir die Polynome

$$a := 1 + x + x^2 + x^3, \quad b := x + x^2, \quad c := x, \quad d := 3 + 2x + x^3, \quad e := x^4.$$

Bilden a, b, c, d, e eine Basis des Vektorraums aller Polynome aus $\mathbb{Q}[x]$, deren Grad kleiner gleich 4 ist?

Aufgabe 3.2 Jemand behauptet, dass man $a, b \in \mathbb{R}$ angeben kann, sodass $1 + i$ eine Lösung der kubischen Gleichung $z^3 + z^2 + (a + 2i)z + 7 + ib = 2i$ über $\mathbb{C}$ darstellt. Stimmt diese Behauptung?

Aufgabe 3.3 Ermitteln Sie $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ und $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ für $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_{4\times 4}(\mathbb{Z}_{17})$, wobei

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{B} := \begin{pmatrix} 16 & 15 & 14 & 13 \\ 12 & 11 & 10 & 9 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3.4 Zeigen Sie für alle $x, y \in \mathbb{C}$ mit $y \neq 0$

$$\overline{\left(\frac{x}{y}\right)} = \frac{\bar{x}}{\bar{y}}.$$

Aufgabe 3.5 Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig aber fix. Wir betrachten die Menge $\mathcal{P}$ aller bivariaten Polynome aus $\mathbb{R}[x, y]$, deren Grad maximal n beträgt. Sei nun $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$. Zeigen Sie, dass die konvexe Hülle $CH(\mathcal{A})$ von $\mathcal{A}$ tatsächlich eine konvexe Menge bildet.

UV Geometrisches Rechnen: Aufgabenblatt 4 für 07.11.2024

Aufgabe 4.1 Beweisen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle reellen $n \times n$ Matrizen

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

und alle $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leqslant k \leqslant n$ gilt $\det(\mathbf{A}) = 0$ falls

$$a_{ij} = 0 \qquad \text{für alle } i, j \in \mathbb{N} \text{ mit } 1 \leqslant i \leqslant k \text{ und } k \leqslant j \leqslant n.$$

Aufgabe 4.2 Invertieren Sie die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

und überprüfen Sie Ihr Resultat durch Nachrechnen und mittels Mathematica.

Aufgabe 4.3 Sei $\mathbf{A} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Berechnen Sie $\mathbf{A}^{-1}$ und leiten Sie damit eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür her, dass $\mathbf{A}$ invertierbar ist. Zeigen Sie weiters, dass

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$$

falls $\mathbf{A}$ invertierbar ist.

Aufgabe 4.4 Lösen Sie das folgende Gleichungssystems über $\mathbb{R}$. Falls eine nicht-eindeutige Lösung existiert, formulieren Sie Ihre Lösung in Abhängigkeit von w (für eine Lösung mit einem freien Parameter), in Abhängigkeit von v, w (für eine Lösung mit zwei freien Parametern), oder in Abhängigkeit von u, v, w (für eine Lösung mit drei freien Parametern). Sie sollen die Lösung händisch (und ohne Einsatz von Mathematica oder dergleichen) ermitteln!

$$\begin{aligned} 1 - 2u - v - w + x + 2z &= 0 \\ 3 - 4u - v - 3w + 3x - y + 4z &= 0 \\ 2 - 2u - 2w + 2x - y + 2z &= 0 \\ -1 + u - 2v + 2w - 3x + 3y - 2z &= 0 \\ -3 + u + 2v + 2w + x - y &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 4.5 Sei $Q := (0, 0)$ der Koordinatenursprung des $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie für beliebige Punkte $P_1 := (x_1, y_1), P_2 := (x_2, y_2), P_3 := (x_3, y_3)$ des $\mathbb{R}^2$: Es gibt Punkte $P_2' := (x_2', y_2')$ und $P_3' := (x_3', y_3')$ so, dass

$$\frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}$$

genau dann den (orientierten) Flächeninhalt des Dreiecks $\Delta(P_1, P_2, P_3)$ beschreibt wenn erstens

$$\frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} x_2' & y_2' \\ x_3' & y_3' \end{pmatrix}$$

den (orientierten) Flächeninhalt des Dreiecks $\Delta(Q, P_2', P_3')$ beschreibt und zweitens die Dreiecke $\Delta(P_1, P_2, P_3)$ und $\Delta(Q, P_2', P_3')$ kongruent sind.

UV Geometrisches Rechnen: Aufgabenblatt 5 für 14.11.2024

Aufgabe 5.1 Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ als

$$f(n) := \det(\mathbf{A}_n), \text{ mit } \mathbf{A}_n := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 3 & 3 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 4 & 4 & 4 & 4 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & n & \cdots & n \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{N}).$$

Finden Sie einen geschlossenen Ausdruck für $f(n)$.

Aufgabe 5.2 Für welche Werte für $s \in \mathbb{Q}$ ergeben die folgenden fünf Vektoren eine Basis für $\mathbb{R}^5$? Wann ergibt sich eine orthogonale Basis? Wann ergibt sich eine orthonormale Basis?

$$\begin{pmatrix} 2 \\ s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} s \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ s \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.3 Wir nehmen an, dass die Matrix $\mathbf{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine orthogonale Matrix ist, für ein beliebig aber fixes $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$. Weiters bezeichnen wir mit $\langle u, v\rangle$ das (übliche) Skalarprodukt von $u, v \in \mathbb{R}^n$. Gilt damit für alle $u, v \in \mathbb{R}^n$ stets $\langle \mathbf{A}u, \mathbf{A}v\rangle = \langle u, v\rangle$? Gilt $\|\mathbf{A}u\| = \|u\|$?

Aufgabe 5.4 Wir nehmen an, dass die Matrix $\mathbf{A} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ eine orthogonale Matrix ist. Gilt für alle $u, v \in \mathbb{R}^3$ stets $\|\mathbf{A}u \times \mathbf{A}v\| = \|u \times v\|$?

Aufgabe 5.5 Für $a, b \in \mathbb{R}^3$ gelte $\|a\| = 1$ und $\langle a, b\rangle = 0$. Beweisen Sie, dass dann $\|a \times b\| = \|b\|$.

UV Geometrisches Rechnen: Aufgabenblatt 6 für 05.12.2024

Aufgabe 6.1 Wie kann man nur durch Einsatz von Additionen, Subtraktionen und Multiplikationen sowie Vergleichsoperationen (mit Null) feststellen, ob drei Punkte des $\mathbb{R}^2$ auf einer Gerade liegen? Versuchen Sie, mit möglichst wenig arithmetischen Operationen auszukommen.

Aufgabe 6.2 Seien p_0, p_1 zwei verschiedene Punkte auf dem Einheitskreis. Wir betrachten den gegen den Uhrzeigersinn orientierten Kreisbogen von p_0 nach p_1 und nehmen an, dass dessen Zentriwinkel Θ weniger als 180° beträgt. Beweisen Sie, dass dann $a\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$a(t) := \frac{1}{\sin\Theta}\big(\sin((1-t)\Theta)p_0 + \sin(t\Theta)p_1\big)$$

eine Parameterisierung dieses Kreisbogens liefert.

Aufgabe 6.3 Für Punkte $a, b \in \mathbb{R}^3$ (und Vektor ab von a nach b) definieren wir die Ebenen

$$\varepsilon_a := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon\ ab_x \cdot x + ab_y \cdot y + ab_z \cdot z = \langle ab, a\rangle\}$$

und

$$\varepsilon_b := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon\ ab_x \cdot x + ab_y \cdot y + ab_z \cdot z = \langle ab, b\rangle\}.$$

Ein Drehzylinder mit Radius ρ, Basisflächenmittelpunkt a und Deckflächenmittelpunkt b ist die Menge aller Punkte zwischen ε_a und ε_b, deren Minimalabstand von der Geraden $\ell(a,b)$ maximal ρ beträgt. Wir setzen $a := (1,2,1)$ und $b := (5,4,3)$. Wie groß muss jeweils der Radius ρ sein, damit

(1) der Punkt $p := (2,4,3)$,
(2) der Punkt $q := (8,7,0)$

im Zylinder liegt?

Aufgabe 6.4 Ein Pfeil wird vom Punkt $\begin{pmatrix}8\\5\\6\end{pmatrix}$ aus in Richtung $\begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ ausreichend weit abgeschossen. Als Ziel des Pfeiles dient das durch die drei Punkte $A = \begin{pmatrix}2\\4\\8\end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}$ definierte Dreieck. Erreicht der Pfeil sein Ziel?

Aufgabe 6.5 Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ schneiden sich im $\mathbb{R}^2$ die Geraden

$$\begin{aligned}
g_1 &: \quad \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}t\\-1\end{pmatrix} \qquad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}\\
g_2 &: \quad 0 = tx + y - 1 - 2t\\
g_3 &: \quad 0 = 2x + y - 4t
\end{aligned}$$

in genau einem Punkt? Ermitteln Sie für alle diese Werte von t die jeweiligen Schnittpunkte.

UV Geometrisches Rechnen: Aufgabenblatt 7 für 12.12.2024

Aufgabe 7.1 Berechnen Sie die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $P = (1, -1, 1/e^2)$ der Funktionsfläche $f(x, y) := e^{-x^2-y^2}$. Visualisieren Sie weiters mittels Mathematica die Funktionsfläche und die Tangentialebene.

Aufgabe 7.2 Sei $H(n, c) := \{u \in \mathbb{R}^2 : \langle u, n\rangle - c < 0\} \cup \{u \in \mathbb{R}^2 : \langle u, n\rangle - c > 0\}$ für $c \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{R}^2$ mit $n \neq 0$. Beweisen Sie explizit und formal sauber, dass $H(n, c)$ nie wegzusammenhängend ist. (Intuitiv ist dies natürlich klar ...)

Aufgabe 7.3 Auf $\mathbb{R}^3$ wollen wir die von der L_∞-Norm induzierte Metrik als Metrik verwenden. Für $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$ definieren wir

$$A \cup_r B := \overline{\mathrm{int}(A) \cup \mathrm{int}(B)} \quad \text{und} \quad A \cap_r B := \overline{\mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B)} \quad \text{und} \quad A \backslash_r B := \overline{\mathrm{int}(A) \backslash \mathrm{int}(B)}.$$

Ermitteln Sie $A \cup_r B$, $A \cap_r B$ und $A \backslash_r B$ für $A := [0, 1] \times [1, 2] \times [3, 5]$ und $B := [1, 2] \times [2, 3] \times [4, 6]$. Vergleichen Sie dies mit den Ergebnissen für $A \cup B$, $A \cap B$ und $A \backslash B$.

Aufgabe 7.4 Der Mitten-Kreis eines Torus liegt in der Ebene $z = -1$, sein Mittelpunkt hat die Koordinaten $P = (1, 1, -1)$, sein Radius beträgt $R = 4\sqrt{2}$, und der Torusring hat den Radius $r = \sqrt{3}$. Ermitteln Sie ein maximales c_1 und ein minimales c_2 so, dass für alle Punkte $p = (p_x, p_y, p_z)$ des Torus gilt: $c_1 \leqslant p_x + p_y + p_z \leqslant c_2$.

Aufgabe 7.5 Wir betrachten n Punkte des $\mathbb{R}^2$ sowie eine Triangulation $\mathcal{T}$ dieser Punkte. (Die Punkte bilden also die Knoten des Triangulationsgraph $\mathcal{T}$.) Nun wählen wir Knoten von $\mathcal{T}$ zufällig aus, wobei ein Knoten genau dann wählbar ist, wenn

1. sein Knotengrad kleiner als 12 ist,
2. keiner seiner Nachbarknoten bereits ausgewählt wurde.

Beweisen Sie, dass immer zumindest $\lfloor n/24 \rfloor$ Knoten gewählt werden können, egal welche Triangulation vorliegt und egal in welcher (zufälligen) Reihenfolge die Knoten ausgewählt werden.

UV Geometrisches Rechnen: Aufgabenblatt 8 für 19.12.2024

Aufgabe 8.1 Beweisen Sie explizit, dass Kollinearität und Parallelität durch eine affine Abbildung erhalten werden.

Aufgabe 8.2 Wir nehmen an, dass eine lineare Abbildung f eine inverse Abbildung g hat. Beweisen Sie direkt (ohne Rückgriff auf Matrizen), dass die inverse Abbildung g dann ebenfalls linear ist.

Aufgabe 8.3 Jemand behauptet, dass für jedes $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ jede invertierbare affine Abbildung im $\mathbb{R}^n$ ein Dreieck immer auf ein Dreieck abbildet. Stimmt diese Behauptung? Beweisen Sie diese Behauptung oder geben Sie zwecks Falsifizierung ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 8.4 Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten den Vektorraum $\mathcal{P}_n$ der Polynome in x vom Grad höchstens n mit reellen Koeffizienten. Wir können das Differenzieren eines Polynoms aus $\mathcal{P}_n$ als eine lineare Abbildung von $\mathcal{P}_n$ auf $\mathcal{P}_n$ auffassen. Geben Sie für die übliche Potenzbasis von $\mathcal{P}_n$ die Abbildungsmatrix $\mathbf{D}$ an, welche dem Differenzieren entspricht. Was sind Bild und Kern von $\mathbf{D}$?

Aufgabe 8.5 Beweisen Sie — unter Ausnützung von Resultaten aus der UV, aber ohne Verwendung von Lemma 124! — dass das vorzeichenbehaftete Volumen des von $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ aufgespannten Parallelepipeds gleich

$$\det \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{pmatrix}$$

ist. (Sie brauchen dabei das korrekte Vorzeichen nicht argumentieren.)

UV Geometrisches Rechnen: Aufgabenblatt 9 für 09.01.2025

Aufgabe 9.1 Ermitteln Sie jeweils $\mathrm{int}(S)$, $\mathrm{ext}(S)$, ∂S und $\overline{S}$ für die folgenden Festlegungen von $S \subset \mathbb{R}$, wobei wir die von der L_2-Norm induzierte Metrik als Metrik auf $\mathbb{R}$ verwenden wollen:

(a) $S := \{1 + (-1)^n \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$,

(b) $S := ([0, 1[\cap \mathbb{Q}) \cup \{\sqrt{2}\} \cup [2, 3] \cup ([4, 5] \backslash \mathbb{Q})$.

Aufgabe 9.2 Die Oberfläche einer Kugel mit Mittelpunkt $(0, 0, 0)$ und Radius $r = 1$ wird mit den Halbräumen $x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ und $x + y + z \leqslant 2\sqrt{3}$ geschnitten. Geben Sie eine Parameterdarstellung der resultierenden Schnittmenge (auf der Oberfläche der Kugel) an.

Aufgabe 9.3 Rotieren Sie den Punkt $P = (1, 0, 0)$ um die Drehachse durch $(1, 1, 1)$ mit Richtungsvektor $(1, 1, 1)$ um den Winkel $\frac{2\pi}{3}$. Sie sollen dabei den Mechanismus aus der Vorlesung ("Rotating About a General Axis") konkret anwenden. Was ergibt sich als Matrix $\mathbf{R}$ der Rotation? Sie sollen dies natürlich tatsächlich gemäß der Herleitung in der Vorlesung durchrechnen und nicht nur in die schlussendliche Formel für die Rotationsmatrix einsetzen! (Mathematica kann für die einzelnen Matrizenmultiplikationen herangezogen werden. Hinweis: $\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.)

Aufgabe 9.4 Wir betrachten eine Ebene ε durch den Ursprung des $\mathbb{R}^3$ mit Einheitsnormalvektor n. Beweisen Sie: Der Ergebnispunkt p' der Spiegelung eines Punktes p an ε ist durch

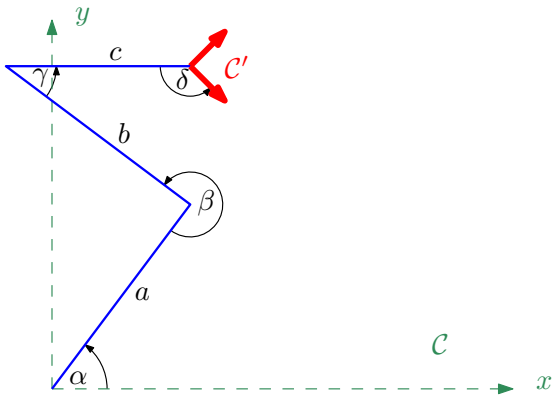
$$p' = p - 2\langle p, n\rangle n$$

gegeben.

Aufgabe 9.5 Ermitteln Sie die Matrix $\mathbf{T}$ der Spiegelung an der Ebene $3x + 4y + 5z = 0$. (Falls p' das Resultat der Spiegelung von p an dieser Ebene ist, soll also gelten $p' = \mathbf{T} \cdot p$.) Rechnen Sie damit p' für $p := (7, 6, 11)$ aus.

UV Geometrisches Rechnen: Aufgabenblatt 10 für 16.01.2025

Aufgabe 10.1 Berechnen Sie die Position und Orientierung des fett (rot) eingezeichneten Greifer-Frame $\mathcal{C}'$ relativ zum strichlierten Weltkoordinatensystems $\mathcal{C}$ für den angegebenen planaren Roboter, wobei $a = b = 5, c = 4$, α so, dass $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ und $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\beta = \frac{3\pi}{2}$, γ so, dass $\sin\gamma = \frac{3}{5}$ und $\cos\gamma = \frac{4}{5}$, sowie $\delta = \frac{3\pi}{4}$. Wie lauten die Koordinaten von $P_{\mathcal{C}'} = (1, 1)$ relativ zu $\mathcal{C}$? Wie lauten die Koordinaten von $Q_{\mathcal{C}} = (5, 7)$ relativ zu $\mathcal{C}'$?



Aufgabe 10.2 Sei $\mathbf{R}_0$ die Matrix, die der Rotation um die positive x-Achse um den Winkel $\frac{\pi}{3}$ entspricht, sowie $\mathbf{R}_1$ die Matrix, die der Rotation um die positive y-Achse um den Winkel $\frac{\pi}{3}$ entspricht. Berechnen Sie mittels des Slerp-Verfahrens die Rotationsmatrix aus $SO(3)$, welche dem Interpolationsparameter $\frac{1}{2}$ entspricht.

Aufgabe 10.3 Berechnen Sie die Matrix der Zentralprojektion mit Augpunkt in $(3, 2, -1)$ und Bildebene $z = 0$. Leiten Sie damit die Projektion von $P := (3, 2, 2)$ auf die Bildebene her.

Aufgabe 10.4 Beweisen Sie die im Beweis von Lemma 269 verwendete Beziehung

$$\det(-(\mathbf{R} - \mathbf{I})) = -\det(\mathbf{R} - \mathbf{I}).$$

Achtung: Es ist ein sauberer Beweis gefordert, auch wenn dies „offensichtlich richtig“ ist!

Aufgabe 10.5 Beweisen Sie: Für jedes reine Quaternion $\mathcal{P}$ und jedes invertierbare Quaternion $\mathcal{Q}$ ist $\mathcal{Q} \cdot \mathcal{P} \cdot \mathcal{Q}^{-1}$ stets ein reines Quaternion.

UV Geometrisches Rechnen: Aufgabenblatt 11 für 23.01.2025

Aufgabe 11.1 Beweisen Sie für orthogonale Matrizen gleicher Größe:
(1) Das Produkt orthogonaler Matrizen ist wieder eine orthogonale Matrix.
(2) Die Multiplikation orthogonaler Matrizen ist nicht immer kommutativ.

Aufgabe 11.2 Seien a, b, c drei verschiedene und nicht-kollineare Punkte des $\mathbb{R}^3$. Benutzen Sie Lemma 120 und Wissen über Transformationen aus den Vortragsdias und den Aufgaben, um explizit zu beweisen, dass $\frac{1}{2}\|ab \times ac\|$ immer den Flächeninhalt des von a, b, c festgelegten Dreiecks angibt. (Natürlich reicht es nicht, Lemma 144 oder Dias 244/245 zu zitieren!)

Aufgabe 11.3 Beweisen Sie Lemma 282.

Aufgabe 11.4 Beweisen Sie für alle Kreise (in der Ebene) mit Mittelpunkt c und Radius $r \in \mathbb{R}^+$ sowie alle Punkte p der Ebene: $p = \mathrm{Inv}_{c,r}(\mathrm{Inv}_{c,r}(p))$.

Aufgabe 11.5 Die Definition 288 der Inversion eines Punktes p an einem Kreis der Ebene läßt sich natürlich auf naheliegende Weise auf Spähren im $\mathbb{R}^3$ verallgemeinern. Berechnen Sie die Inversion von $p := (1/2, 1/3, 1/4)$ an S^2.

UV Geometrisches Rechnen: Aufgabenblatt 12 für 30.01.2025

Aufgabe 12.1 Nehmen wir an, dass für $j, k \in \mathbb{N}_0$ eine Gleitkommazahl als eine Sequenz

$$s|e_j e_{j-1} \cdots e_2 e_1 e_0 | m_k m_{k-1} \cdots m_2 m_1 m_0$$

von (j+k+3) Bit $s, e_j, \ldots, e_0, m_k, \ldots, m_0 \in \{0, 1\}$ gespeichert wird, woraus sich dann mit

$$E := \sum_{i=0}^{j} e_i 2^i \quad \text{und} \quad M := \sum_{i=0}^{k} m_i 2^i$$

folgender tatsächlich gespeicherter Wert ergibt:

$$(-1)^s \cdot (1 + 2^{-k-1} \cdot M) \cdot 2^{E-2^j+1}$$

Mit $j := 7$ und $k := 22$ ist dies die übliche Speicherung von "float" Variablen im kleinendigen ("little endian") Format. Ermitteln Sie $s, e_7, \ldots, e_0, m_{22}, \ldots, m_0$ für die Zahl 12,258. Welche Zahl wird dabei tatsächlich gespeichert?

Aufgabe 12.2 Was wird tatsächlich gespeichert, wenn man einer "float" Variable die Werte (a) 16777216, (b) 16777217 oder (c) 16777218 zuweist? Warum?

Aufgabe 12.3 Warum sind die bei "double" speicherbaren Gleitkommazahlen nicht regelmäßig zwischen der kleinsten negativen und der größten positiven repräsentierbaren Zahl verteilt?

Aufgabe 12.4 In der Lehrveranstaltung habe ich betont, dass alle Gleitkomma-Berechnungen konsistent sein müssen. Konkret muß bei der Berechnung von 3×3 Determinanten zur Bestimmung der Orientierung etwa gelten, dass

$$\begin{aligned} \det(p,q,r) = \quad \det(q,r,p) = \quad \det(r,p,q) \\ = -\det(q,p,r) = -\det(p,r,q) = -\det(r,q,p). \end{aligned}$$

Wie läßt sich dies garantieren?

Aufgabe 12.5 In der Lehrveranstaltung haben wir gesehen, dass das lineare Gleichungssystem (in $x, y \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 0.48x + 0.99y &= 1.47 \end{aligned}$$

schlecht konditioniert ist. Interpretieren Sie dieses Gleichungssystem geometrisch und wenden Sie dann Bisektion an, um eine Lösung approximativ zu bestimmen. Hinweis: Es ist nicht gefordert, dieses Verfahren in einer Programmiersprache komplett auszuprogrammieren. Sie können dies gerne beispielsweise mittels Mathematica realisieren, indem Sie (1) geeignete Funktionen definieren und dann (2) einige Iterationsschritte händisch mittels Copy&Paste ausführen. (Allerdings sollen Sie nicht „nur" eine Bibliotheksfunktion mit der gewünschten Anzahl an Iterationsschritten aufrufen und dann das Ergebnis bestaunen ...)