UV Geometrisches Rechnen: Aufgabenblatt 1 für 2022-10-10

Aufgabe 1.1 Wir betrachten $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $f(n) := \log n + 2n^2 + 2n + 4$ und $g(n) := n^2$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?
a) $f \in O(g)$, b) $f \in \Theta(g)$, c) $f \in \Omega(g)$, d) $f \in o(g)$

Aufgabe 1.2 Seien v, e, f die Anzahlen der Knoten, Kanten und Flächen eines planaren (zusammenhängenden) Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$, bei dem jeder Knoten einen Grad größer oder gleich drei hat. Zeigen Sie, dass bei $f > 1$ die folgenden sechs Ungleichungen gelten:

$$e \leqslant 3v - 6 \qquad f \leqslant 2v - 4 \qquad f \leqslant \frac{2}{3}e \qquad v \leqslant \frac{2}{3}e \qquad e \leqslant 3f - 6 \qquad v \leqslant 2f - 4.$$

Aufgabe 1.3 Ermitteln Sie die Verknüpfungstabelle für eine endliche Gruppe mit drei Elementen und erklären Sie, warum diese Verknüpfungstabelle eindeutig ist.

Aufgabe 1.4 Für $p \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ definieren wir $\mathbb{Z}_p := \{n \in \mathbb{N}_0 \colon n < p\}$. Weiters definieren wir $\oplus_p \colon \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ und $\odot_p \colon \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ wie folgt: Für $x, y \in \mathbb{Z}_p$ seien $x \oplus_p y := (x + y) \mod p$ und $x \odot_p y := (x \cdot y) \mod p$. Zeigen Sie: Falls p keine Primzahl ist, dann bildet $(\mathbb{Z}_p, \oplus_p, \odot_p)$ keinen Körper.

UV Geometrisches Rechnen: Aufgabenblatt 2 für 2022-10-17

Aufgabe 2.1 Für einen Vektorraum V über einem Körper F muss es bekanntlich ein Element $0 \in V$ geben, sodass $a + 0 = a$ für alle $a \in V$. Gilt dann auch $0 + a = a$ für alle $a \in V$? Gilt weiters immer $0 \cdot a = 0$ und $a + (-1) \cdot a = 0$?

Aufgabe 2.2 Wir behaupten, dass die affine Hülle von fünf verschiedenen Punkten $p_1, p_2, \ldots, p_5$ des $\mathbb{R}^6$ nicht notwendigerweise immer einen Teilraum des $\mathbb{R}^6$ bildet. Ist diese Behauptung richtig? Beweisen oder widerlegen Sie diese Behauptung.

Aufgabe 2.3 Wir betrachten den Vektorraum, der alle reellwertigen stetigen Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ enthält. Offenbar sind die Funktionen $\sin, \cos$ und $\exp$ Vektoren dieses Vektorraums. (Wie üblich ist $\exp(x) := e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.) Liegt $\exp$ im Teilraum $[\{\sin, \cos\}]$?

Aufgabe 2.4 Sei $n \in \mathbb{N}$. Was ist die Dimension des Vektorraums (über $\mathbb{R}$), welcher der linearen Hülle der n Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \\ n+1 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ \vdots \\ n+2 \end{pmatrix}, \ldots,\ v_n = \begin{pmatrix} n \\ n+1 \\ n+2 \\ \vdots \\ 2n-1 \end{pmatrix}$$

des $\mathbb{R}^n$ entspricht?

UV Geometrisches Rechnen: Aufgabenblatt 3 für 2022-10-24

Aufgabe 3.1 Zeigen Sie explizit: Falls x_1, x_2 reelle Wurzeln des Polynoms $x^2 + px + q$ aus $\mathbb{R}[x]$ sind, mit $p, q \in \mathbb{R}$, dann

$$x_1 + x_2 = -p \qquad \text{und} \qquad x_1 \cdot x_2 = q.$$

Aufgabe 3.2 Seien $a, b, c, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, mit $a \neq 0$. Wir nehmen an, dass die polynomiale Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ reelle Lösungen hat. Beweisen Sie explizit, dass dann das Polynom $ax^2 + bx + c$ genau dann in $a(x-x_1)(x-x_2)$ faktorisiert werden kann, wenn x_1, x_2 die reellen Lösungen von $ax^2+bx+c = 0$ sind.

Aufgabe 3.3 Ermitteln Sie alle $z \in \mathbb{C}$, welche die Gleichung

$$2z + (\bar{z})^2 = -1 + 6i$$

erfüllen.

Aufgabe 3.4 Berechnen Sie in $\mathbb{Z}_7$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

UV Geometrisches Rechnen: Aufgabenblatt 4 für 2022-11-07

Aufgabe 4.1 Bilden die folgenden Matrizen $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$,$\mathbf{C}$,$\mathbf{D}$ eine Basis von $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$?

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} := \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4.2 Seien $\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{F} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren damit eine $2n \times 2n$ Matrix $\mathbf{A}$ über $\mathbb{R}$ wie folgt:

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{E} & \mathbf{F} \end{pmatrix}$$

Gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ stets folgende Beziehung?

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{C} \cdot \det \mathbf{F} - \det \mathbf{D} \cdot \det \mathbf{E}$$

Aufgabe 4.3 Für $n, k \in \mathbb{N}$ betrachten wir $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ so, dass $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. Weiters betrachten wir für $1 \leqslant i \leqslant k$ Matrizen $\mathbf{A}_i \in M_{n_i\times n_i}(\mathbb{R})$ und definieren eine Matrix $\mathbf{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ die folgt

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_k \end{pmatrix},$$

wobei die einzelnen $\mathbf{0}$-Matrizen von geeigneter Dimension sind. Beweisen Sie mittels geeigneter Induktion, dass $\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{k} \det(\mathbf{A}_i)$.

Aufgabe 4.4 Zeigen Sie direkt durch Anwenden der aus der Schule bekannten Flächenformeln (und ohne Verwendung von Theorem 112 oder dessen Beweis), dass

$$\left| \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \right|$$

den Flächeninhalt des Dreiecks $\Delta(0, P_1, P_2)$ des $\mathbb{R}^2$ angibt, wobei $P_1 := (x_1, y_1), P_2 := (x_2, y_2)$.

UV Geometrisches Rechnen: Aufgabenblatt 5 für 2022-11-14

Aufgabe 5.1 Wir betrachten vier Vektoren $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$. Wie können Sie mittels Vektorarithmetik die Lösungen $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ des linearen Gleichungssystems $\lambda a + \mu b + \nu c = d$ ermitteln? (Sie dürfen dabei Spezialfälle, die sich etwa durch eine Division durch Null ergeben, vernachlässigen.)

Aufgabe 5.2 Wir betrachten fünf Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^6$, welche paarweise senkrecht aufeinander stehen, und behaupten, dass diese Einheitsvektoren trotzdem nicht notwendigerweise linear unabhängig sind. Beweisen oder widerlegen Sie diese Behauptung.

Aufgabe 5.3 Wir betrachten die Klasse $\mathcal{C}$ aller stetigen und integrierbaren Funktionen, die $[0, \pi]$ nach $\mathbb{R}$ abbilden. Bildet

$$\langle f, g\rangle := \int_0^\pi f(x)g(x)\,dx$$

ein inneres Produkt auf $\mathcal{C}$? Falls ja, was ergibt sich dann für den Abstand $d(\sin, \cos) := \|\sin - \cos\|_\int$? (Dabei ist $\|\cdot\|_\int$ die durch das innere Produkt induzierte Norm.)

Aufgabe 5.4 Ermitteln Sie mittels PCA-Analyse die Hauptachsen der Punktewolke

$$\binom{2}{1}\binom{8}{7}\binom{-4}{-5}\binom{3}{0}\binom{1}{2}\binom{0}{0}\binom{1}{-1}\binom{4}{2}\binom{3}{3}.$$

Sie können zur Berechnung gerne elementare Hilfsmittel von Mathematica heranziehen, wie etwa die Bildung von Summen, das Berechnen von Determinanten, oder das Lösen von Gleichungen. (Allerdings müssen Sie dann in der UV die entsprechenden Mathematica-Befehle auch angeben können!) Fertigen Sie weiters eine Skizze an und überprüfen Sie graphisch die Plausibilität Ihres Ergebnis.

UV Geometrisches Rechnen: Aufgabenblatt 6 für 2022-11-28

Aufgabe 6.1 Wir betrachten drei Punkte p, q, r im $\mathbb{R}^3$. Beweisen Sie, dass es stets einen Punkt s auf $\ell(p, q)$ gibt, sodass $sr \perp pq$.

Aufgabe 6.2 Wir betrachten drei Punkte p, q, r im $\mathbb{R}^3$ und bezeichnen den (Euklidischen) Abstand zwischen zwei Punkten $u, v \in \mathbb{R}^3$ mit $d(u, v)$. Beweisen Sie, dass dann mit dieser Definition immer $d(p, q) \leqslant d(p, r) + d(r, q)$ gilt. Unter welcher Bedingung gilt sogar $d(p, q) < d(p, r) + d(r, q)$? (Eine Vermutung allein reicht nicht – Sie brauchen auch einen Beweis dafür!)

Aufgabe 6.3 Seien p, q zwei verschiedene Punkte des $\mathbb{R}^2$ sowie $c \in \mathbb{R}^+$ mit $0 < c < 1$. Wie üblich bezeichnen wir den Euklidischen Abstand zwischen zwei Punkten $u, v \in \mathbb{R}^2$ mit $d(u, v)$. Beweisen Sie, dass

$$\{u \in \mathbb{R}^2 \colon d(u, p) = c^2 \cdot d(u, q)\}$$

einem Kreis entspricht.

Aufgabe 6.4 Wir betrachten den Kreis in der Ebene $x + y + 2z = 10$ mit Mittelpunkt $M = (1, 1, 4)$ und Radius $\sqrt{3}$. Ermitteln Sie den minimalen Abstand dieses Kreises von der Ebene $z = 1$.

UV Geometrisches Rechnen: Aufgabenblatt 7 für 2022-12-05

Aufgabe 7.1 Wir betrachten die Fläche

$$((4+2\sqrt{2}\cos s)\cdot\cos t, (4+2\sqrt{2}\cos s)\cdot\sin t, 2\sqrt{2}\sin s) \qquad \text{mit } s,t\in[0,2\pi].$$

Berechnen Sie den Schnitt der Ebene $\sqrt{2}x+\sqrt{2}y+z=6$ mit der Tangentialebene an diese Fläche, die sich für $s=t:=\frac{\pi}{4}$ ergibt.

Aufgabe 7.2 Ein (unendlicher) Kreiskegel hat seine Spitze im Punkt $S=(1,2,3)$. Weiters wissen wir, dass seine Rotationsachse den Richtungsvektor $v=(1,1,-1)$ hat und dass der Punkt $P=(0,1,7)$ auf seinem Mantel liegt. Berechnen Sie den in P nach Außen zeigenden Einheitsnormalvektor des Kegelmantels.

Aufgabe 7.3 Berechnen Sie den Flächeninhalt des Polygons $(p_0,p_1,p_2,p_3,p_4,p_5)$ mittels der Flächenformel von Gauß, wobei

$$p_0:=p_5:=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\quad p_1:=\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}\quad p_2:=\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}\quad p_3:=\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}\quad p_4:=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}.$$

Überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch Aufsummieren der Flächeninhalte „geeigneter“ Dreiecke, für welche die Flächeninhalte gemäß Schulmathematik leicht ermittelbar sind.

Aufgabe 7.4 Sei $\mathcal{X}$ ein metrischer Raum mit Metrik d, sowie $x\in\mathcal{X}$. Sei weiters $r\in\mathbb{R}^+$. Beweisen Sie: $\operatorname{int}(B(x,r))=B(x,r)$.

UV Geometrisches Rechnen: Aufgabenblatt 8 für 2022-12-12

Aufgabe 8.1 Ermitteln Sie einen Punkt der Ebene, welcher am Strahl mit Startpunkt p und Einheitsrichtungsvektor v liegt und welcher gleichen Abstand zu p und einem weiteren Punkt q hat.

Aufgabe 8.2 Seien $\mathcal{Q} \in \mathbb{H}$ ein beliebig aber fixes Quaternion mit $\|\mathcal{Q}\| \neq 0$. Man kann folgendes zeigen: Es gibt genau eine Funktion $\sigma\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ so, dass für jedes $p \in \mathbb{R}^3$ und dadurch definierte $\mathcal{P} := (0, p) \in \mathbb{H}$ und $\mathcal{P}' := (0, \sigma(p)) \in \mathbb{H}$ gilt

$$\mathcal{Q} \cdot \mathcal{P} \cdot \mathcal{Q}^{-1} = \mathcal{P}'.$$

Beweisen Sie explizit, dass σ eine Isometrie auf $\mathbb{R}^3$ darstellt.

Aufgabe 8.3 In welcher Ebene muß sich ein planarer Spiegel befinden, damit ein entlang der Geraden

$$\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} \quad \text{in Richtung} \quad \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$$

einfallender Lichtstrahl entlang der Geraden

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} \quad \text{in Richtung} \quad \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$$

reflektiert wird?

Aufgabe 8.4 Beweisen Sie, dass Teilungsverhältnisse auf einer Geraden durch eine affine Abbildung erhalten werden.

UV Geometrisches Rechnen: Aufgabenblatt 9 für 2022-12-19

Aufgabe 9.1 Ermitteln Sie die Matrix der Spiegelung an der Geraden $ax + by = 0$, wobei $a^2 + b^2 = 1$. (Achtung: Nachschlagen in einer Formelsammlung allein reicht nicht; die entsprechende Matrix ist herzuleiten!)

Aufgabe 9.2 Wir betrachten die 3D-Kurve

$$\mathcal{C}(s) := \begin{pmatrix} \mathcal{C}_1(s) \\ 0 \\ \mathcal{C}_2(s) \end{pmatrix}, \qquad \text{wobei } \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}.$$

Eine Rotation dieser Kurve um die z-Achse liefert die Rotationsfläche

$$\mathcal{S}(s, \varphi) := \begin{pmatrix} \mathcal{C}_1(s) \cdot \cos\varphi \\ \mathcal{C}_1(s) \cdot \sin\varphi \\ \mathcal{C}_2(s) \end{pmatrix}, \qquad \text{wobei } s \in [\alpha, \beta], \varphi \in [0, 2\pi[.$$

Sei $\mathcal{R} := \{\mathcal{S}(s, \varphi) : s \in [\alpha, \beta], \varphi \in [0, 2\pi[\}$. Es ist klar, dass die Parametrisierung von $\mathcal{R}$ von der konkreten Parametrisierung der rotierten Kurve abhängt. Kann es passieren, dass auch $\mathcal{R}$ selbst — aufgefaßt als Menge von Punkten des $\mathbb{R}^3$ — von der gewählten Parametrisierung der rotierten Kurve abhängt und sich daher ändern kann, wenn eine andere Parametrisierung dieser Kurve gewählt wird? Warum (nicht)?

Aufgabe 9.3 In der Parametrisierung aus Beispiel 9.2 setzen wir $\alpha := 0, \beta := 2$ sowie $\mathcal{C}_1(s) := s$ und $\mathcal{C}_2(s) := 4 - s^2$. Berechnen Sie die Gleichung der Tangentialebene in $\mathcal{S}(1, \frac{\pi}{2})$. Um welche Art von Fläche handelt es sich bei $\mathcal{R}$?

Aufgabe 9.4 Ermitteln Sie die Matrix der linearen Transformation, welche die Punkte

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in die Punkte

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

abbildet. Versuchen Sie weiters, diese Transformation als Komposition von Rotation, Skalierung und Scherung zu spezifizieren. (Natürlich sind nicht alle diese Elementartransformationen notwendigerweise in dieser Reihenfolge auch Bestandteil der gesuchten Transformation.)

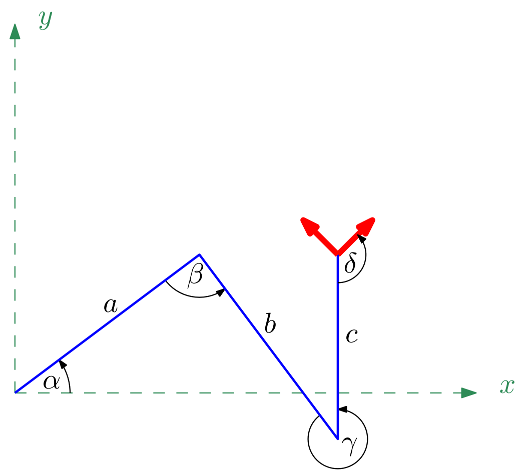
UV Geometrisches Rechnen: Aufgabenblatt 10 für 2023-01-09

Aufgabe 10.1 Führen Sie mittels Quaternionen eine Rotation mit Winkel $\frac{2\pi}{3}$ des Punktes $P = (1, 0, 0)$ um die Drehachse durch $(1, 1, 1)$ mit Richtungsvektor $(1, 1, 1)$ aus. Keinen Taschenrechner oder gar Mathematica verwenden! (Hinweis: $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.)

Aufgabe 10.2 Rotieren Sie noch einmal den Punkt $P = (1, 0, 0)$ um die Drehachse durch $(1, 1, 1)$ mit Richtungsvektor $(1, 1, 1)$ um den Winkel $\frac{2\pi}{3}$. Sie sollen diesmal das Ergebnis berechnen, indem Sie in einer (geeignet gewählten) Ebene normal zur Rotationsachse das Faktum ausnützen, dass der Eingabepunkt und der Ergebnispunkt auf einem Kreis liegen und daher der Ergebnispunkt durch eine geeignete Kreisparameterisierung ermittelt werden kann. (Sie können Mathematica für händisch „mühsame“ Rechnungen heranziehen.)

Aufgabe 10.3 Zeigen Sie, dass ein Quaternion $\mathcal{P} \in \mathbb{H}$ genau dann ein Einheitsquaternion ist, wenn es einen Winkel $\phi \in \mathbb{R}$ sowie einen Einheitsvektor $u \in \mathbb{R}^3$ gibt, sodass $\mathcal{P} = (\cos \phi, u \sin \phi)$.

Aufgabe 10.4 Berechnen Sie die Position und Orientierung des fett (rot) eingezeichneten Greifer-Frame $\mathcal{C}'$ relativ zum strichlierten Weltkoordinatensystems $\mathcal{C}$ für den angegebenen planaren Roboter, wobei $a = b = 5, c = 4$, α so, dass $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ und $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, γ so, dass $\sin \gamma = -\frac{3}{5}$ und $\cos \gamma = \frac{4}{5}$, sowie $\delta = \frac{3\pi}{4}$. (Wenden Sie dazu bitte eine Vorgangsweise wie bei den A-Matrizen an, anstatt zu versuchen, dies mittels „Schulgeometrie“ zu berechnen.) Wie lauten die Koordinaten von $P_{\mathcal{C}'} = (1, 1)$ relativ zu $\mathcal{C}$? Wie lauten die Koordinaten von $Q_{\mathcal{C}} = (5, 7)$ relativ zu $\mathcal{C}'$? (Hinweis: Die Skizze ist maßstabgetreu — Sie können Ihre Resultate daher überprüfen.)



UV Geometrisches Rechnen: Aufgabenblatt 11 für 2023-01-16

Aufgabe 11.1 Berechnen Sie die Matrix der Zentralprojektion, die sich bei $Z := (4, 2, 3)$ als Projektionszentrum und Bildebene $2x + y + z = 1$ ergibt. Ermitteln Sie weiters damit die Projektionen von $Q_1 := (2, 1, 2)$ und $Q_2 := (-2, -6, -1)$. (Sie können Mathematica für händisch „mühsame“ Teilrechnungen heranziehen.)

Aufgabe 11.2 Wir wissen, dass die Matrix

$$\mathbf{T} := \begin{pmatrix} 16/25 & -12/25 & -3/5 \\ -12/25 & 9/25 & -4/5 \\ -3/5 & -4/5 & 0 \end{pmatrix}$$

die Matrix einer Spiegelung an einer Ebene durch den Ursprung ist. Ermitteln Sie die Gleichung dieser Ebene.

Aufgabe 11.3 Berechnen Sie die Projektion von $P := (3, 5, 2)$ bei einer Zentralprojektion mit Projektionszentrum $Z := (0, 0, 0)$ und Bildebene (Projektionsebene) $x + y + 2z = 2$.

Aufgabe 11.4 Wir modellieren die Erde als (perfekte) Kugel und bezeichnen mit B_β eine Kurve auf der Erde mit konstanter geographischer Breite β. Analog bezeichnen wir mit L_α eine Kurve mit konstanter geographischer Länge. Seien nun $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $-180^o \leqslant \alpha < 180^o$ und $-90^o < \beta < 90^o$ beliebig aber fix. Beweisen Sie, dass sich die stereographischen Projektionen (vom Nordpol in die Äquatorebene) von B_β und L_α in einem rechten Winkel schneiden.

UV Geometrisches Rechnen: Aufgabenblatt 12 für 2023-01-23

Aufgabe 12.1 Wir betrachten das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 4 \pm {}^1\!/\!_{100} \\ -x + y &= 1 \pm {}^1\!/\!_{100}, \end{aligned}$$

Was können wir über die Lösung dieses Systems aussagen?

Aufgabe 12.2 Wir betrachten das lineare Gleichungssystem für $x \in \mathbb{R}^4$

$$\mathbf{A}x = b \qquad \text{wobei } \mathbf{A} := \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \text{ und } b := \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}.$$

Wir wissen weiters, dass die Koeffizienten von b nur bis auf $\pm{}^1\!/\!_{10}$ genau sind und dass

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 25 & -41 & 10 & -6 \\ -41 & 68 & -17 & 10 \\ 10 & -17 & 5 & -3 \\ -6 & 10 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Erfüllt $(6.0, -7.2, 2.9, -0.1)^t$ dieses System relativ zur gegebenen Genauigkeit? Wie schätzen Sie die praktische Brauchbarkeit einer Lösung dieses Systems ein? Warum?

Aufgabe 12.3 Implementieren Sie in Mathematica die Jacobi-Iteration und Gauss-Seidel Iteration zur Lösung des folgenden Gleichungssystems (für $x, y \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} 2x + y &= 7 \\ x + 3y &= 6 \end{aligned}$$

Was ergibt sich für die ersten sechs neuen Iterationswerte, wenn man mit $(2, 2)$ startet?

Aufgabe 12.4 Der Binomische Lehrsatz sagt uns, dass

$$(x-1)^{10} = x^{10} - 10x^9 + 45x^8 - 120x^7 + 210x^6 - 252x^5 + 210x^4 - 120x^3 + 45x^2 - 10x + 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Was ergibt sich, wenn man beide Ausdrücke jeweils für $1 + 10^{-i}$ (für $1 \leqslant i \leqslant 15$) und $1 + 2^{-i}$ (für $1 \leqslant i \leqslant 50$) auf einer Gleitkommaarithmetik auswertet? Probieren Sie dies mit “double” Variablen in C aus.