PS Diskrete Mathematik: Aufgabenblatt 1 — 2021-03-12

Aufgabe 1-1 Formalisieren Sie den vorliegenden Text als aussagenlogische Formeln und beweisen Sie, dass der angegebene Schluss logisch korrekt ist: *Wenn keine Klausur geschrieben wird, sind die StudentInnen glücklich. Wenn die StudentInnen glücklich sind, fühlt sich der Vortragende wohl. Wenn sich aber der Vortragende wohl fühlt, dann hat er keine Lust, Vorlesung zu halten. Wird aber keine Klausur geschrieben, dann hat er Lust, Vorlesung zu halten. Also wird eine Klausur geschrieben.*

Aufgabe 1-2 Im folgenden sei I der Individuenbereich der Informatik-StudentInnen der PLUS. Weiters seien die folgenden Prädikate über I gegeben:
$L(x)$: „x ist laut während der Vorlesung“,
$Z(x)$: „x kann gut zuhören“,
$A(x, y)$: „x kann mit y gut zusammen arbeiten“.
Wandeln Sie die folgenden vier Aussagen in eine umgangssprachliche Formulierung um:

(1) $\forall x \in I \ \ (L(x) \vee \neg Z(x))$ (2) $\exists x \in I \ \ (L(x) \Rightarrow \neg Z(x))$
(3) $(\forall x \in I \ \ \neg L(x)) \Rightarrow (\exists x \in I \ \ Z(x))$ (4) $\exists x \in I \ \ \forall y \in I \ \ \neg A(x, y)$

Aufgabe 1-3 Negieren Sie die vier Aussagen aus Aufgabe 1-2 sowohl umgangsprachlich wie auch formal. In den Formeln müssen alle Negationszeichen so weit innen wie möglich stehen. (Es reicht also nicht, die Negation von $A \wedge B$ als $\neg(A \wedge B)$ zu schreiben.)

Aufgabe 1-4 Formalisieren Sie die nachstehenden Aussagen (1)–(3) als prädikatenlogische Formeln und beweisen Sie dann, dass (3) eine Folgerung von (1) und (2) ist:
(1) Jeder Barbier rasiert alle Personen, die sich nicht selbst rasieren.
(2) Kein Barbier rasiert jemanden, der sich selbst rasiert.
(3) Es gibt keine Barbiere.
Verwenden Sie dazu die Prädikate $B(x)$ für „x ist Barbier“ und $R(x, y)$ für „x rasiert y“.

Aufgabe 1-5 [Schriftliche Ausarbeitung] Seien X und Y nicht-leere Mengen und sowie $f : X \to Y$ eine Funktion. Beweisen Sie, dass die Relation

$$a \sim b \text{ für } a, b \in X \text{ genau dann, wenn } f(a) = f(b)$$

eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 1-6 Sei X eine nicht-leere Menge und sei $U \subseteq X \times X$. Wir bezeichnen mit $A(U)$ die Menge aller Äquivalenzrelationen auf X, welche U als Teilmenge enthalten. Zeigen Sie, dass dann auch

$$R := \bigcap_{T \in A(U)} T$$

eine Äquivalenzrelation auf X ist.

Aufgabe 1-7 Was ergibt sich für R aus Aufgabe 1-6, wenn wir die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ für X und

$$U := \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x + y \geqslant 2021\}$$

nehmen?

PS Diskrete Mathematik: Aufgabenblatt 2 — 2021-03-19

Aufgabe 2-1 Lösen Sie folgende Aufgaben, ohne Rechenhilfen wie etwa Taschenrechner. Hinweis: Ein Polynom in x ist durch $(x-r)$ genau dann dividierbar, wenn r eine Nullstelle des Polynoms ist. Probieren Sie ganzzahlige Teiler des Koeffizienten des Monoms vom Grad 0 als Nullstellen.

a) Berechnen Sie die Nullstellen folgendes Polynoms: $1/3 \cdot x^2 + 3x - 12$.
b) Zerlegen Sie $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ mittels Polynomdivision.
c) Zerlegen Sie $-2x^3 + 3x^2 + 2x - 3$ mittels Polynomdivision.

Aufgabe 2-2 Betrachten Sie folgende Definitionen:

a) $M(n) := \begin{cases} n - 10 & \text{falls } n > 100, \\ M(M(n+11)) & \text{falls } n \leqslant 100. \end{cases}$

b) $H(n) :\Leftrightarrow \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls } M(n) - 90 = 1, \\ \text{falsch} & \text{sonst.} \end{cases}$

(i) Bestimmen Sie $M(n)$ für alle $n \in \{99, 100, 101, 102\}$.
(ii) Handelt es sich bei diesen um explizite oder um rekursive Definitionen? Beschreiben Sie in Worten, was für n gelten muss damit das Prädikat H wahr ist.

Aufgabe 2-3 Für $n \in \mathbb{N}$:

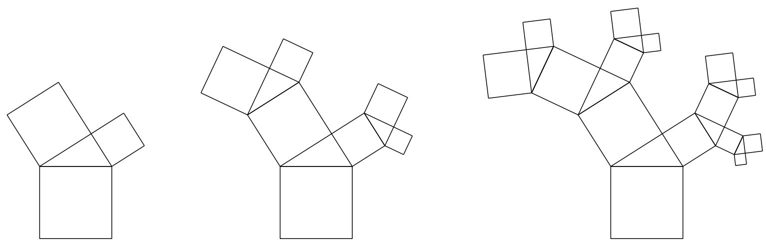
a) $T(n) := \begin{cases} n/2 & \text{falls } n \text{ gerade}, \\ 3n+1/2 & \text{sonst.} \end{cases}$

b) $Z(n) := \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1, \\ Z(T(n)) + 1 & \text{sonst.} \end{cases}$

Bestimmen Sie $T(n)$ für alle $n \leqslant 8$ und $Z(n)$ für alle $n \leqslant 4$. Sind diese Definitionen rekursiv oder explizit? Sind sie unproblematisch oder nicht? Inwiefern?

Aufgabe 2-4 Sei $T(n)$ der Pythagoras-Baum der Tiefe $n \in \mathbb{N}$ mit folgender rekursiven Beschreibung:
- Errichten Sie über einem horizontalen Geradensegment der Länge eins ein Quadrat;
- Auf der Oberseite a zeichnen Sie ein rechtwinkliges Dreieck, wobei a die Hypotenuse bildet;
- Rufen Sie diese Funktion für die beiden Schenkel dieses Dreieckes auf.

Siehe Skizze als Beispiel für die Konstruktion von $T(n)$.



$T(n)$ wird bis zur vorgegebenen Rekursionstiefe n entfaltet. Für $n := 0$ erhalten Sie das Ausgangsquadrat, für $n := 1$ führen Sie die rekursive Formel für das erste Quadrat ein mal aus. Geben Sie eine Formel an zur Berechnung der Summe aller Quadratflächen von $T(n)$. Wie schnell wächst dieser Baum, ohne Beweis, kennen Sie andere Funktionen, welche ähnlich wachsen?

Aufgabe 2-5 [Schriftliche Ausarbeitung] Seien p, q zwei aussagenlogische Variablen. Zeigen Sie, dass es für $\neg p$, $p \vee q$, $p \wedge q$, $p \Rightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$ jeweils logisch äquivalente Formeln gibt, welche nur $\uparrow$ als Junktor verwenden. (Zur Erinnerung: $p \uparrow q \equiv \neg(p \wedge q)$.)

Aufgabe 2-6 Seien p, q, r aussagenlogische Variablen. Zeigen Sie:
$\big((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)\big) \Rightarrow \big(p \Rightarrow r\big)$

Aufgabe 2-7 Seien a, b, c aussagenlogischen Variablen. Zeigen Sie (ohne Wahrheitstabelle):
$\big(a \Rightarrow (\neg b \vee c)\big) \Rightarrow \big((a \wedge b) \Rightarrow c\big)$.

PS Diskrete Mathematik: Aufgabenblatt 3 — 2021-03-26

Aufgabe 3-1 Wir betrachten die Menge S der natürlichen Zahlen $\leqslant 110$, welche Vielfache von 10 sind. Also $S = \{10, 20, 30, \ldots, 100, 110\}$. Aus dieser Menge ziehen wir sieben (unterschiedliche) Zahlen *zufällig*. Zeigen Sie, dass es unter den sieben gezogenen Zahlen zwei gibt, deren Summe 120 ergibt.

Aufgabe 3-2 Zeigen Sie die Mittelwertungleichung *mit Hilfe eines indirekten Beweises*:
Für $a, b \in \mathbb{R}^+ : \sqrt{a \cdot b} \leqslant \frac{a+b}{2}$.

Aufgabe 3-3 [Schriftliche Ausarbeitung] Für natürliche n sei $T(n) := n^2/4 + n - 13$ und $P(n) :\Leftrightarrow (T(n) > 0)$.
Zeigen Sie für alle natürlichen n: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Was können wir damit über $P(n)$ aussagen?

Aufgabe 3-4 Bestimmen Sie die Lösungsmenge für $x \in \mathbb{R}$ mittels Fallunterscheidung:

$$(x-2) \cdot \operatorname{sgn}(x+3) - 1/2|x+4| < 0.$$

(sgn x ist die signum Funktion, die das "Vorzeichen" von x liefert. Also $-1, 0, 1$ je nachdem ob $x < 0, = 0, > 0$ ist.
$|x|$ ist die Betragsfunktion. Sie liefert x für $x \geqslant 0$, sonst $-x$.)

Aufgabe 3-5 Zeigen Sie: Für alle nicht-negativen $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_0$:

$$0 \leqslant a^k(a-b)(a-c) + b^k(b-a)(b-c) + c^k(c-a)(c-b).$$

Eventuell hilft folgende Umformung (durch Herausheben):
$a^k(a-b)(a-c) + b^k(b-a)(b-c) + c^k(c-a)(c-b) =$
$(a-b)[a^k(a-c) - b^k(b-c)] + c^k(c-a)(c-b)$

Aufgabe 3-6 Betrachten Sie eine kleine Dartscheibe in Form eines Quadrates der Seitenlänge 2 dm. Auf dieser Scheibe kann man problemlos 2 Dartpfeile unterbringen, sodass ihr Abstand genau $2 \cdot \sqrt{2}$ dm ist — man platziere die Pfeile einfach in gegenüberliegenden Eckpunkten, dadurch wird der Abstand maximal und das ist in diesem Fall genau $\sqrt{2}$ mal die Seitenlänge, also $2 \cdot \sqrt{2}$ dm.

Zeigen Sie: Wirft man 5 Dartpfeile zufällig auf die Scheibe, so gibt es immer zwei, die nicht weiter als $\sqrt{2}$ dm voneinander entfernt sind.

Aufgabe 3-7 Beweisen Sie:
Es gibt keine natürliche Zahl n_0, sodass für alle natürlichen Zahlen n mit $n \geqslant n_0$ gilt: $6n^2 - 2n^3 > 0$

a) indirekt (nehmen Sie an, es gäbe so ein n_0 und zeigen Sie einen Widerspruch auf), und
b) direkt (bringen Sie die durch Äquivalenzumformungen die Negation ganz hinein und zeigen Sie die Korrektheit, wenn nötig mit Fallunterscheidung).

PS Diskrete Mathematik: Aufgabenblatt 4 — 2021-04-16

Aufgabe 4-1 Ermitteln Sie die Verknüpfungstabelle für eine endliche Gruppe der Ordnung drei und erklären Sie, warum diese Verknüpfungstabelle eindeutig ist.

Aufgabe 4-2 Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Wir bezeichnen die neutralen Elemente von $+$ und $\cdot$ mit 0 und 1. Gemäß Vorlesung definieren wir $\frac{x}{y} := x \div y$ für $x \in K$ und $y \in K\backslash\{0\}$. Beweisen Sie, dass für alle $a, c \in K$ und alle $b, d \in K\backslash\{0\}$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot d = b \cdot c \qquad \text{und} \qquad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

gilt.

Aufgabe 4-3 Wir haben in der Vorlesung diskutiert, dass $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ mit $f(x) := e^x$ ein Gruppenisomorphismus von $(\mathbb{R}, +)$ auf $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ ist, wobei $\mathbb{R}^+$ die positiven reellen Zahlen bezeichnet und $+$ sowie $\cdot$ die übliche Addition und Multiplikation auf $\mathbb{R}$ bezeichnen. Weisen Sie dazu explizit nach, dass

(1) f mit diesen arithmetischen Operationen kompatibel ist,
(2) das neutrale Element von $(\mathbb{R}, +)$ auf das neutrale Element von $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ abgebildet wird,
(3) jedes inverse Element von $(\mathbb{R}, +)$ auf das entsprechende inverse Element von $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ abgebildet wird,
(4) f eine Bijektion von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^+$ bildet.

Selbstverständlich dürfen Sie dazu das aus der Schule bekannte Wissen zur natürlichen Exponentialfunktion verwenden.

Aufgabe 4-4 Wir betrachten die Menge der Symmetrieabbildungen eines gleichseitigen Dreiecks mit der Hintereinanderausführung zweier derartiger Abbildungen als Verknüpfung. (Eine Symmetrieabbildung des Dreiecks ist eine Abbildung, welche das Dreieck auf sich selbst abbildet.) Welche algebraische Struktur ergibt sich?

Aufgabe 4-5 [Schriftliche Ausarbeitung] Sei S eine durch $\preceq$ total geordnete Menge. Beweisen Sie detailliert (mit genauen Begründungen und sauberen Formulierungen), dass $\preceq$ eine Wohlordnung auf S bildet, falls jede nichtleere Teilmenge $T \subseteq S$ ein minimales Element hat.

Aufgabe 4-6 Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Wie üblich bezeichnen wir die neutralen Elemente von $+$ und $\cdot$ mit 0 und 1. Beweisen Sie: Falls $0 = 1$, dann $K = \{0\}$.

Aufgabe 4-7 Sei S eine nichtleere Menge mit einer strikten Halbordnung $\prec$. Eine nichtleere Teilmenge $K \subseteq S$ wollen wir als Kette in S relativ zu $\prec$ bezeichnen, wenn alle Elemente von K mittels $\prec$ paarweise mit einander vergleichbar sind. Wir wollen nun S als eine endliche Menge von Aufgaben betrachten, die bei Ausführung auf einem Prozessor alle jeweils eine Zeiteinheit brauchen. Weiters soll $\prec$ Abhängigkeiten modellieren: $s_1 \prec s_2$ soll bedeuten, dass Aufgabe s_1 vor Aufgabe s_2 ausgeführt werden muß. Diese Abhängigkeiten induzieren eine oder mehrere Ketten in S. Beweisen Sie, dass alle Aufgaben von S parallel in k Zeiteinheiten ausgeführt werden können, für ein $k \in \mathbb{N}$, falls eine jede sich so ergebende Kette maximal k Elemente hat. (Wir setzen die Existenz von genügend Prozessoren voraus und ignorieren natürlich Probleme, die etwa vom parallelen Zugriff auf Daten kommen könnten.)

PS Diskrete Mathematik: Aufgabenblatt 5 — 2021-04-23

Aufgabe 5-1 [Schriftliche Ausarbeitung] Wir nennen eine Zahl $k \in \mathbb{N}_0$ eine Quadratzahl falls es eine Zahl $m \in \mathbb{N}_0$ mit $m^2 = k$ gibt. Beweisen Sie: Jedes $n \in \mathbb{N}$, welches ungerade ist, lässt sich als Differenz zweier verschiedener Quadratzahlen aus $\mathbb{N}_0$ darstellen. (Hinweis: Ein konstruktiver Beweis ist einfach, aber Sie müssen dies nicht notwendigerweise konstruktiv beweisen. Um eine Idee zur Konstruktion der gesuchten Zahlen zu bekommen, könnte man sich die Aufgabe für kleine Werte von n ansehen.)

Aufgabe 5-2 Zeigen Sie mittels Induktion, dass

$$\prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 5-3 Zeigen Sie mittels Induktion, dass

$$3+\sum_{i=1}^{n}(3+5i)=\frac{(n+1)(5n+6)}{2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 5-4 Sei $n \in \mathbb{N}$, so gelte folgende rekursive Definition:

$$a_n := \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ 8 & \text{falls } n = 2, \\ a_{n-1} + 2 \cdot a_{n-2} & \text{falls } n \in \mathbb{N}\backslash\{1,2\}. \end{cases}$$

Zeigen Sie mittels Induktion, dass $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} + 2(-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 5-5 Für $n \in \mathbb{N}$ gelte folgende Definition:

$$d_n := \begin{cases} n & \text{falls } n \in \{1,2,3\}, \\ d_{n-1} + d_{n-2} + d_{n-3} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie mittels Induktion, dass $d_n < 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 5-6 Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\big(11 \mid (10^n-1)\big) \Rightarrow \big(11 \mid (10^{n+2}-1)\big) \qquad \text{und} \qquad \big(11 \mid (10^n+1)\big) \Rightarrow \big(11 \mid (10^{n+2}+1)\big)$$

Aufgabe 5-7 Beweisen Sie die Aussagen (4) und (11) von Lemma 58 aus der Vorlesung:
Sei $a \in \mathbb{N}$, zeigen Sie, dass

i) $4 \mid a$ genau dann, wenn die aus den letzten zwei Stellen von a gebildete Zahl durch 4 teilbar ist, und

ii) $11 \mid a$ genau dann, wenn die alternierende Summe von a durch 11 teilbar ist.

PS Diskrete Mathematik: Aufgabenblatt 6 — 2021-04-30

Aufgabe 6-1 Wir haben in der Vorlesung die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ als Paar von Zahlen aus $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ eingeführt (Def. 95). Wir haben weiters in Def. 93 eine zweistellige Relation, $\cong_Q$, für solche Tupel definiert von der wir in Lemma 94 behaupten, sie sei eine Äquivalenzrelation. Offensichtlich ist $\cong_Q$ sowohl reflexiv als auch symmetrisch.

Zeigen Sie auch die Transitivität.

Achten Sie in Ihrem Beweis darauf, dass Sie den Bereich der ganzen Zahlen, den wir bereits auf eine solide Basis gestellt haben, nicht verlassen. Insbesondere dürfen Sie also verwenden, dass $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ein abelscher Ring ist. Divisionen sind jedoch potentiell problematisch und dürfen auf jeden Fall nicht so ohne Weiteres verwendet werden.

Aufgabe 6-2 Zeigen Sie: $3 \mid (n^3 - 4n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ auf zwei verschieden Arten: a) Fallunterscheidung und b) vollständige Induktion.

Aufgabe 6-3 Bestimmen Sie das multiplikative Inverse von 9 in $\mathbb{Z}_{43}$.
(Verwenden Sie dazu die Methoden aus der VO. Einfaches Ausprobieren reicht auf keinen Fall.)

Aufgabe 6-4 Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha(n)$ die Anzahl der natürlichen Teiler von n.
Zeigen Sie: $\alpha(n)$ ist genau dann ungerade, wenn n eine Quadratzahl ist.

Tipp: Betrachten Sie Teiler von n, welche kleiner $\sqrt{n}$ bzw. größer $\sqrt{n}$ sind. Was fällt auf?

Aufgabe 6-5 [Schriftliche Ausarbeitung] Sei m Ihre Matrikelnummer.
Weiters, sei r der Rest von m bei der Division durch 1000.

a) Bestimmen Sie ein Paar ganzer Zahlen (x, y), sodass $1 = 2021 \cdot x + r \cdot y$.
Verwendung Sie dazu den EEA in der in der VO angegebenen Form und geben Sie alle Zwischenschritte an.

b) Warum gibt es in Ihrem bestimmten Fall so eine Lösung?

c) Wie viele weitere Paare gibt es? Geben Sie die Lösungsmenge an. Es reicht dabei, wenn Sie für eine „vernünftig“ große Menge argumentieren können, dass tatsächliche alle Elemente der Menge Lösungen dieser diophantischen Gleichung sind. Sie müssen nicht nachweisen, dass Sie tatsächlich die komplette Lösungsmenge gefunden haben.

Aufgabe 6-6 Finden Sie jeweils ein $x \in \mathbb{Z}_7$, sodass gilt:

a) $11^{66} + 66^{11} \equiv_7 x$;

b) $111^{666} + 666^{111} \equiv_7 x$;

Führen Sie Ihre Berechnungen in $\mathbb{Z}_7$ ohne Taschenrechner (o. dgl.) durch.

Aufgabe 6-7 Bei einer Übung sollen die Studierenden in Gruppen eingeteilt werden.
Es geht sich leider nicht aus, dass alle Gruppen gleich groß sind. Mögliche Varianten sind

- Zwei Sechser-Gruppen und sonst alles Fünfer-Gruppen,
- eine Siebener-Gruppen und sonst alles Sechser-Gruppen, oder
- zwei Achter-Gruppen und sonst alles Siebener-Gruppen.

Wieviel Teilnehmer hat die Lehrveranstaltung mindestens?
(Nur Durchprobieren reicht nicht. Nutzen Sie die Methoden, die in der Vorlesung vermittelt wurden.)

PS Diskrete Mathematik: Aufgabenblatt 7 — 2021-05-07

Aufgabe 7-1 In der VO wurde behauptet, dass eine Dezimalzahl z genau dann eine rationale Zahl ist, wenn z eine endliche oder periodische Dezimaldarstellung hat. Beweisen Sie diese Behauptung für positive Dezimalzahlen.

Aufgabe 7-2 Wir betrachten die Aufgabe aus 5-2 erneut. Diesmal suchen wir aber einen direkten Beweis, dass

$$\prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}\backslash\{1,2\}$ gilt.

Aufgabe 7-3 Seien $(M_1, \prec_1)$ und $(M_2, \prec_2)$ zwei strikt halbgeordnete Mengen. Beweisen Sie, dass dann $(M_1 \times M_2, (\prec_1, \prec_2)_{lex})$ ebenfalls eine strikt halbgeordnete Menge ist.

Aufgabe 7-4 In der VO haben wir Theorem 111 („Vollständigkeit von NAND“) mittels einer wohlfundierten Induktion bewiesen. Angenommen, Sie würden das Konzept einer wohlfundierten Induktion nicht kennen und wären daher auf eine normale Induktion angewiesen. Wie müssten Sie dann vorgehen? Formulieren Sie einen entsprechenden Induktionsbeweis.

Aufgabe 7-5 Seien $a \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{N}_0$ mit $b \leqslant a$. Weiters $r \in \mathbb{N}_0$ und $q \in \mathbb{N}$ so, dass $a = b \cdot q + r$ mit $0 \leqslant r < b$. (Gemäß Lemma 71 existieren passende q, r.) Beweisen Sie, dass dann $\gcd(a, b) = \gcd(b, r)$.

Aufgabe 7-6 Beweisen Sie mittels wohlfundierter Induktion, dass die nachfolgend definierte Funktion $g \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ für $a \geqslant b$ den größten gemeinsamen Teiler zweier Zahlen $a \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{N}_0$ berechnet:

$$g(a,b) := \begin{cases} a & \text{falls } b = 0, \\ g(b, a \bmod b) & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Aufgabe 7-7 [Schriftliche Ausarbeitung] Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Berechnen Sie

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{i-2}.$$

Achten Sie bitte auf eine saubere Formulierung. Sofern dies für Sie brauchbar ist, dürfen Sie das Wissen $\sum_{i=0}^{n} i^2 = 1/6 \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$ ohne Beweis verwenden. Achten Sie aber bitte darauf, dass alle Behauptungen bewiesen werden, sofern Sie nicht aus der VO bekannt sind oder auf Basiswissen aus der Schule beruhen.

PS Diskrete Mathematik: Aufgabenblatt 8 — 2021-05-21

Aufgabe 8-1 [Schriftliche Ausarbeitung] Beweisen Sie mit Induktion und ohne Benutzung des Binomischen Lehrsatzes, dass

$$\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$$

für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geqslant k$.

Aufgabe 8-2 Wie viele Möglichkeiten gibt es, sechs Bücher mit Festeinband (Hardcover) und vier Taschenbücher auf einem Regal nebeneinander zu arrangieren? Wie viele Möglichkeiten gibt es, falls keine zwei Taschenbücher direkt nebeneinander stehen dürfen?

Aufgabe 8-3 Sie befinden sich in einer kleinen Lernrunde mit weiteren Studierenden. Von einer nahegelegenen Bäckerei sollen acht Krapfen geholt werden. Es stehen fünf verschiedene Füllungen zur Auswahl, zusätzlich werden neben klassischem Staubzucker noch drei weitere Glasuren angeboten. (Die Bäckerei hat genügend Krapfen jeder Art.)

a) Wieviele Möglichkeiten gibt es, acht Krapfen mit klassischem Staubzucker zu kaufen?
b) Wieviele Möglichkeiten gibt es, acht verschiedene Krapfen zu kaufen?
c) Die Lernrunde besteht aus vier Personen, wovon jede zwei Krapfen bekommt. Wieviele mögliche Zuordnungen gibt es unter der Annahme, dass alle Krapfen verschieden sind.
Hinweis: Betrachten Sie die Krapfen pro Person als Menge jedoch die Personen als 4-Tupel.

Aufgabe 8-4 Wir wählen zufällig sieben verschiedene Punkte $P_1 \dots P_7$ auf einer Parabel und betrachten dann die Menge G aller Verbindungsstrecken zwischen verschiedenen Punkten.

a) Wieviele Verbindungsstrecken gibt es insgesamt, also wie groß ist $|G|$?
b) Zwei Strecken g_1 und g_2 aus G schneiden sich *echt*, wenn sie sich schneiden und ihr Schnitt nicht mit einem der Endpunkte zusammenfällt. Wie viele echte Schnittpunkte gibt es insgesamt zwischen den Strecken in G. (Wir nehmen an, dass sich niemals drei Strecken in einem Punkt schneiden.)

Aufgabe 8-5 Ordnen Sie folgende Funktionen nach ihrer asymptotischen Komplexität in nicht-absteigender Reihenfolge:
(a): $\left({}^3\!/_2\right)^n$, (b): $2^{64}-1$, (c): n^3, (d): $0.0001n^2$, (e): $10000n$, (f): $\log n^2$, (g): $2^{\log n}$, (h): $n \log n$, (i): $n2^n$, (j): 2^{1000}, (k): n, (l): $n^2 \log n$, (m): 2^n, (n): $\log n$, (o): n^{100}, (p): 4^n, (q): $\log n^3$, (r): n^n, (s): $n^3 \log n$, (t): $n!$, (u): $\left({}^1\!/_2\right)^n$.
Auf Nachfrage (beim Vortragen) muss die Reihung detailliert argumentiert werden können.

Aufgabe 8-6 Für $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ und $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, definiert mit

$$f(n) := \frac{\ln n}{n} \quad \text{und} \quad g(n) := \frac{n^2}{e^n},$$

zeigen Sie oder widerlegen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} g(n)$.

Aufgabe 8-7 Sei r Ihre Matrikelnummer modulo 100. Für $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ und $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, definiert mit

$$f(n) := n^3 + n^2 + 5, \quad g(n) := (r+1)n^2, \quad h(n) = 10n^4 + 3n^3 - n,$$

zeigen Sie oder widerlegen Sie dass:

(a) $g \in o(f)$;

(b) $h \in O(n^4)$;

(c) $g \in O(n^{15/8})$.

Verwenden Sie dabei für zumindest eine Teilaufgabe die zugrundeliegenden Definitionen der O-Notation.

PS Diskrete Mathematik: Aufgabenblatt 9 — 2021-05-28

Aufgabe 9-1 Zeigen oder widerlegen Sie mathematisch sauber:

a) $n \cdot \log_3(n^2) \in \Theta(n(\log_3 n)^2)$.

b) $4^n \cdot \log_4 n \in o(6^n)$.

(Aussagen wie „n^3 wächst offensichtlich schneller als $n \log n$, deshalb $n^3 \in \Omega(n \log n)$" sind ohne Beweis nicht hinreichend.)

Aufgabe 9-2 Zeigen Sie, dass für alle natürlichen n und alle positiven reellen a gilt: $a^n \in O(n!)$.
(Es gilt sogar $a^n \in o(n!)$, aber das müssen Sie nur zeigen, wenn Sie es auch verwenden, was definitiv nicht nötig ist.)

Aufgabe 9-3 [Schriftliche Ausarbeitung] Sei m Ihre Matrikelnummer und $r := (m \bmod 10) + 3$. Finden Sie für jeden der folgenden Terme mit Hilfe der Master-Methode aus der VO (Thm. 172 bzw. 173) ein f, sodass $T \in \Theta(f)$, oder argumentieren Sie, warum die Master-Methode nicht anwendbar ist.

a) $T(n) = 4\,T(n/2) + n \log n^r$,

b) $T(n) = 27\,T(n/3) + n^2(n + r)$,

c) $T(n) = 4\,T(n/4) + n \log n$,

d) $T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + r \log n$,

e) $T(n) = 3T(n/2) + n^r$.

Aufgabe 9-4 Finden Sie einen expliziten Ausdruck für a_n gegeben durch

$$a_n = \begin{cases} n+1 & \text{für } n = 0, n = 1 \\ a_{n-1} + 6a_{n-2} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 9-5 Gegeben ist ein $1 \times n$ großes Feld und hinreichend viele blaue Steine der Größe 1×1, rote Steine der Größe 1×1 und grüne Steine der Grösse 1×2.

a) Wir suchen eine rekursive Formel für die Anzahl der Möglichkeiten $M(n)$, ein $1 \times n$ großes Feld mit Steinen abzudecken. Überlegen Sie sich zuerst, wie viele Möglichkeiten es für ein 1×1, 1×2, 1×3 und 1×4 großes Feld gibt und finden Sie dann eine Formel für $M(n)$, die auf Werte von M für kleinere n zurückgreift. (Vergessen Sie nicht auf die Basisfälle in der Lösung.)

b) Finden Sie eine explizite Formel für $M(n)$ mit den Mitteln der VO.

Aufgabe 9-6 Sei die Folge a_n für $n \in \mathbb{N}_0$ wie folgt definiert:

$$a_n := \begin{cases} n & \text{für } 0 \leqslant n \leqslant 2, \\ a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3} + 8 & \text{für } 3 \leqslant n. \end{cases}$$

Berechnen Sie eine explizite Form für a_n mit Hilfe der Methoden aus der VO.

Aufgabe 9-7 Die Fibonacci Zahlen $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ für $n \geqslant 2$ und $F(n) := n$ für $n = 0$ und $n = 1$ lassen sich auch explizit darstellen als

$$T(n) := \left[\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Dass der Term $T(n)$ tatsächlich gleich $F(n)$ von oben ist, scheint aus der Form heraus überraschend, da in $T(n)$ ja Wurzeln und Brüche auftauchen.

Zeigen Sie direkt, also ohne dem Wissen von $T(n) = F(n)$, dass $T(n)$ für natürliche n zumindest rational ist.

PS Diskrete Mathematik: Aufgabenblatt 10 — 2021-06-11

Aufgabe 10-1 [Schriftliche Ausarbeitung] Wir betrachten die reelle Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, welche wie folgt definiert ist:

$$t_n := \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0, \\ 2 & \text{falls } n = 1, \\ 3 & \text{falls } n = 2, \\ 2t_{n-1} + t_{n-2} - 2t_{n-3} & \text{falls } n \geqslant 3. \end{cases}$$

Bestimmen Sie einen geschlossenen Ausdruck für $(t_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch Anwenden der Theorie von Theorem 170.

Aufgabe 10-2 (1) Wir betrachten die Funktion $T\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, welche wie folgt definiert ist:

$$T(n) := \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 1, \\ 2T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + n \log n & \text{falls } n > 1. \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass T schlussendlich nicht abnehmend ist.
(2) Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $f(n) := n \log^2 n$. Beweisen Sie, dass f glatt ist.

Aufgabe 10-3 Wir betrachten wieder die Funktion $T\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ wie in Aufgabe 10-2 definiert. Finden Sie ohne Verwendung des Master Theorem 173 eine Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, sodass $T \in \Theta(f)$ ist. Falls dies hilfreich ist, dürfen Sie die Behauptungen aus Aufgabe 10-2 verwenden, auch wenn Sie diese Aufgabe nicht gelöst haben.

Aufgabe 10-4 Wir betrachten wieder die Funktion $T\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ wie in Aufgabe 10-2 definiert. Ist das Master Theorem 173 anwendbar? Falls ja, wie? Falls nein, warum nicht?

Aufgabe 10-5 Wir wollen zwei Graphen $\mathcal{G}_1 := (V, E_1)$ und $\mathcal{G}_2 := (V, E_2)$ mit der gleichen Knotenmenge V als verschieden ansehen, falls $E_1 \neq E_2$. Sei $|V| := n$. Wie viele verschiedene (schlichte ungerichte) Graphen gibt es auf der gleichen Knotenmenge V? Drücken Sie diese Anzahl in Abhängigkeit von n aus. (Natürlich ist die behauptete Anzahl sauber zu begründen.)

Aufgabe 10-6 Beweisen Sie: Ein zusammenhängender Graph $\mathcal{G} := (V, E)$ mit zumindest drei Knoten enthält genau dann eine Eulersche Tour, wenn sich E für ein passendes $k \in \mathbb{N}$ in k Teilmengen $E_1, E_2, \ldots, E_k$ partitionieren lässt, sodass jedes E_i (für $1 \leqslant i \leqslant k$) die Kanten eines Zyklus in $\mathcal{G}$ bildet.

Aufgabe 10-7 Beweisen Sie: Ein 2-regulärer Graph $\mathcal{G}$ mit zumindest drei Knoten ist genau dann zusammenhängend, wenn $\mathcal{G}$ einen Hamiltonschen Kreis enthält.

PS Diskrete Mathematik: Aufgabenblatt 11 — 2021-06-18

Aufgabe 11-1 Seien m, n natürliche Zahlen mit $m + n > 2$.

a) Zeigen Sie, dass $K_{m,n}$ einen spannenden Baum der Höhe 2 hat.

b) Zeigen Sie, dass $K_{m,n}$ einen spannenden Baum der Höhe $1 + \min\{m, n\}$ hat.

(Anmerkung: Die Höhe ist für Wurzelbäume definiert. Wählen Sie also für ihren spannenden Baum einen Wurzelknoten derart, dass der resultierende Wurzelbaum die Bedingung an die Höhe erfüllt.)

Aufgabe 11-2 Wir nennen einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ zweifach-zusammenhängend, wenn für je zwei verschiedene Knoten $u, v \in V$ gilt, dass es zwei verschiedene Pfade von u nach v gibt, die keine gemeinsamen Knoten aufweisen, abgesehen von u und v selbst.

a) Zeigen Sie, dass jede Kante eines zweifach-zusammenhängenden Graph zu einem Zyklus gehört.

b) Zeigen Sie, dass ein zweifach-zusammenhängender Graph keinen Schnittknoten besitzt.

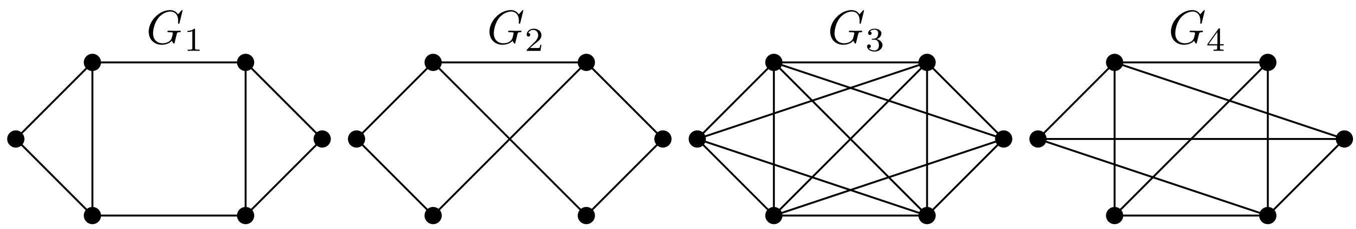
Aufgabe 11-3 [Schriftliche Ausarbeitung] Sei G ein Baum mit 14 Knoten von Grad eins, alle weiteren Knoten von G seien von Grad 4 oder 5. Bestimmen Sie die möglichen Paare an Anzahlen für Knoten mit Grad 4 und 5. (Also beispielsweise $(3, 7)$ für drei 4er Knoten und sieben 5er Knoten.) Argumentieren Sie bitte die Korrektheit und Vollständigkeit Ihrer Lösung; simples Probieren reicht nicht!

Aufgabe 11-4 Sei G ein zusammenhängender Graph mit zumindest einem Zyklus. Beweisen Sie, G ist bipartit genau dann wenn G keinen Zyklus ungerader Länge enthält.

Aufgabe 11-5 Sei G ein zyklenfreier Graph, zeigen Sie dass G bipartit ist.

Aufgabe 11-6 Sei G ein zusammenhängender Graph mit durchschnittlichem Grad > 2, d.h. die Summe der Knotengrade durch die Anzahl der Knoten ist größer als zwei. Zeigen Sie, dass G zumindest zwei Zyklen enthält.

Aufgabe 11-7 Zeigen oder widerlegen Sie: folgende Graphen sind (a) planar, (b) bipartit.



PS Diskrete Mathematik: Aufgabenblatt 12 — 2021-06-25

Aufgabe 12-1 Sie haben $k \geqslant 2$ Farben und wollen damit einen Wald aus c Bäumen mit in Summe n Knoten färben. Auf wie viele Arten geht das?

Aufgabe 12-2 Sei $P = (V_P, E_P)$ ein planarer Graph und $G = (V_G, E_G)$ ein Graph mit $\chi(G) = k$. Nun wollen wir einen neuen Graphen H mit Knotenmenge $V_P \cup V_G$ konstruieren. Die Kantenmenge soll alle Kanten aus P und alle Kanten aus G enthalten und zusätzlich alle Kanten, die einen Knoten von V_P mit einem Knoten von V_G verbinden.

Zeigen oder widerlegen Sie: $k + 1 \leqslant \chi(H) \leqslant k + 4$.

Aufgabe 12-3 Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $a_n = (-1)^{n+1} + 1 + -3n + 2n^2$ und

$$b_n := \begin{cases} a_n & \text{für } 0 \leqslant n \leqslant 2, \\ b_{n-1} + b_{n-2} - b_{n-3} + 8 & \text{für } 3 \leqslant n. \end{cases}$$

Widerlegen Sie oder zeigen Sie durch Induktion, dass $a_n = b_n$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 12-4 [Schriftliche Ausarbeitung] Sei $r := (m \bmod 1000)$ wobei m Ihre Matrikelnummer sei. Wir multiplizieren $(\lambda + 1/\lambda)^{r+1000}$ aus und betrachten die Summanden des Ergebnisses. Diese haben die Form $a \cdot \lambda^k$ für bestimmte a und k.

Sei nun k eine beliebige, fixe, ganze Zahl. Berechnen Sie den Koeffizienten a im Summanden $a \cdot \lambda^k$. Für welche k ist a null, kommt also λ^k nicht in der Summe vor?

Aufgabe 12-5 Wir wollen mit K die Menge aller Komplexitätsfunktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}^+$ bezeichnen, also $K := \{f | f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+\}$. Wir definieren die Relation $\sim$ für zwei Funktionen $f, g \in K$ mit $f \sim g$ gdw. $f \in \Theta(g)$. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist (ohne Lemma 157 und dgl.).

Aufgabe 12-6 Die Menge X sei die Menge aller natürlichen Zahlen größer als 1 und sei $\lhd$ eine Relation auf X mit $a \lhd b$ genau dann wenn a ein Teiler von b ist.

a) Zeigen Sie, dass $\lhd$ eine Halbordnung ist.
b) Beweisen oder widerlegen Sie: $\lhd$ ist eine Totalordnung.
c) Was sind die minimalen und maximalen Elemente von X bzgl. $\lhd$? Gibt es ein Minimum oder ein Maximum?

Aufgabe 12-7

a) Ermitteln Sie den größten gemeinsamen Teiler von 7245 und 876 mittels Euklidschem Algorithmus.

Bestimmen Sie die vollständige Lösungsmenge aller (x, y) aus $\mathbb{Z}^2$ mit

b) $70x + 33y = 1$,
c) $3x + 9y = 2$.