PS Diskrete Mathematik: Aufgabenblatt 1 für 14.03.2025

Aufgabe 1.1 Geben Sie für die folgenden Formeln die freien und gebundenen Variablen an und negieren Sie die Formeln. (Negationszeichen dürfen in Ihrer Lösung nur noch ganz innen stehen.)

1. $\exists z \; f(z) = z$
2. $\exists x \; \neg(P(x) \wedge P(y))$
3. $\forall x \; \exists y \; f(x, y) \neq z$

Aufgabe 1.2 Eine reellwertige Funktion f heißt auf einem abgeschlossenen Intervall I gleichmäßig stetig, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x, y \in I$ mit $|x - y| < \delta$ folgt, dass $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ ist.
(1) Formulieren Sie diese Definition in der Sprache der Prädikatenlogik.
(2) Negieren Sie die resultierende prädikatenlogische Formel und formen Sie das Ergebnis so um, dass darin keine Teilformel negiert vorkommt.
(3) Formulieren Sie die Negation umgangssprachlich.

Aufgabe 1.3 Übersetzen Sie die folgenden Aussagen in die Sprache der Prädikatenlogik. Wählen Sie dazu selbst geeignete Symbole für die Terme und Prädikate, wobei Sie explizit den Übersetzungsschlüssel und die Stelligkeit angeben. Negationen ziehen bitte immer so weit wie möglich in die Formel hinein.

1. Alle Menschen sind sterblich.
2. Der Mensch ist sterblich.
3. Nur Sterbliche kennen Romeo.
4. Jeder PS-Teilnehmer kennt einen anderen PS-Teilnehmer.
5. Jeder PS-Teilnehmer ist sterblich oder kein Mensch. PS-Teilnehmer, die keine Menschen sind, kennen weder Romeo noch Julia.

Aufgabe 1.4 Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für welche die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$(x^3 - x) \cdot (x^2 + x - 6) \cdot (2x^2 - 5x - 3) = 0$$

Aufgabe 1.5 Bestimmen Sie alle $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, für welche das folgende lineare Gleichungssystem erfüllt ist:

$$\begin{aligned}
1 &= a + b + c + d \\
-1 &= a + 2b + 3c + 4d + 5e \\
0 &= a - 2c \\
-3 &= b + c + d \\
-1 &= -b + 2d
\end{aligned}$$

Aufgabe 1.6 Vereinfachen Sie die folgenden Terme:

$$\frac{2^{n+1}}{2^n} \qquad \log_2 4 \cdot \frac{8^n}{2^{n+1}} \qquad \frac{7^{3\log_7 n}}{n} \qquad \frac{\log^2(n \cdot m) - \log^2 m - \log n^2 \log m}{\log n} \qquad \frac{(4 \cdot 2^n)^2}{\log_{13}(13^4)}$$

Aufgabe 1.7 Sei A eine nicht-leere Menge und P eine Partition von A. Beweisen Sie, dass die Relation

$$R_P := \{(x, y) \in A \times A : \text{ es gibt ein } X \in P \text{ mit } x \in X \text{ und } y \in X\}$$

eine Äquivalenzrelation auf A ist.

PS Diskrete Mathematik: Aufgabenblatt 2 für 21.03.2025

Aufgabe 2.1 Sei A eine nicht-leere Menge und R eine reflexive Relation auf A. Weiters gelte

$$(\forall x, y, z \in A \;\; (x, y) \in R \wedge (x, z) \in R \Rightarrow (y, z) \in R).$$

Beweisen oder widerlegen Sie jeweils, ob jede solche Relation symmetrisch ist, sowie ob jede solche Relation transitiv ist.

Aufgabe 2.2 Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ mit $(a, b) \mapsto a \cdot b$ für $a, b \in \mathbb{Z}$. Dabei steht $\mathbb{Z}$ für die Menge der ganzen Zahlen, und $\cdot$ für die gewöhnliche Multiplikation. Beweisen oder widerlegen Sie jeweils, ob diese Funktion injektiv, surjektiv oder bijektiv ist.

Aufgabe 2.3 Betrachten wir erneut die Funktion f aus der vorigen Aufgabe. Geben Sie das Urbild $f^{-1}(\{10\})$ an, sowie das Urbild $f^{-1}(\{0\})$.

Aufgabe 2.4 Sei Σ ein Alphabet, also eine endliche Menge. Geben Sie eine rekursive Definition der Funktion $r\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ an, die zu einem Wort $w \in \Sigma^*$ das rückwärts geschriebene Wort (das Wort mit umgedrehter Zeichenreihenfolge) liefert.

Verwenden Sie Ihre Funktion, um den Funktionswert des Wortes WOLF über dem Alphabet der 26 gewöhnlichen lateinischen Großbuchstaben zu bestimmen, unter Angabe aller Zwischenschritte.

Aufgabe 2.5 Beweisen Sie durch Umformen, mit genauer Angabe der verwendeten Äquivalenzen aus Theorem 8 der Vorlesung:

1. $H \Rightarrow A \wedge B \;\equiv\; (H \Rightarrow A) \wedge (H \Rightarrow B)$
2. $H \Rightarrow (A \Rightarrow B) \;\equiv\; H \wedge A \Rightarrow B$
3. $H \Rightarrow A \vee B \;\equiv\; H \wedge \neg A \Rightarrow B$

Aufgabe 2.6 Formalisieren Sie die nachstehenden Aussagen 1.–3. als prädikatenlogische Formeln und beweisen Sie dann, dass 3. eine Folgerung von 1. und 2. ist:

1. Jeder Barbier rasiert alle Personen, die sich nicht selbst rasieren.
2. Kein Barbier rasiert jemanden, der sich selbst rasiert.
3. Es gibt keine Barbiere.

Verwenden Sie dazu die Prädikate $B(x)$ für „x ist Barbier“ und $R(x, y)$ für „x rasiert y“.

Aufgabe 2.7 Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei $I_k := \{i \in \mathbb{N}\colon i \leqslant k\}$. Dabei steht $\mathbb{N}$ für die Menge der natürlichen Zahlen, und wie etwas später in der Vorlesung definiert, gilt für das gesamte Proseminar die Konvention $0 \notin \mathbb{N}$. Gegeben sei ein fixes $n \in \mathbb{N}$. Für eine Funktion $f\colon I_n \times I_n \to I_{n^2}$ sollen alle folgenden Aussagen wahr sein:

1. Die Funktion f ist bijektiv.
2. $\left(\forall i \in I_n \;\; \sum_{j=1}^{n} f((i, j)) = \frac{n^3 + n}{2}\right)$
3. $\left(\forall j \in I_n \;\; \sum_{i=1}^{n} f((i, j)) = \frac{n^3 + n}{2}\right)$
4. $\sum_{i=1}^{n} f((i, i)) = \frac{n^3 + n}{2}$
5. $\sum_{i=1}^{n} f((n + 1 - i, i)) = \frac{n^3 + n}{2}$

Geben Sie für $n := 4$ eine geeignete Funktion f an, die obigen Anforderungen entspricht. Tipp: Die Anordnung der $n \cdot n$ Funktionswerte in einem Quadrat könnte hilfreich sein.

PS Diskrete Mathematik: Aufgabenblatt 3 für 28.03.2025

Aufgabe 3.1 Beweisen oder widerlegen Sie, dass für alle negativen reellen Zahlen x gilt:

$$x^3 + x^2 - x - 1 \leqslant 0.$$

Aufgabe 3.2 Zeigen Sie mittels Widerspruchsbeweis, dass für alle Mengen S, T und U gilt:

$$(S \cup T = T \cap U) \Rightarrow (S \backslash T = \varnothing).$$

Aufgabe 3.3 Die Mittelwertungleichungen besagen, dass für positive reelle Zahlen x_i das harmonische Mittel kleiner oder gleich dem geometrischen Mittel ist, welches wiederum kleiner oder gleich dem arithmetischen ist, also:

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} \leqslant \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Führen Sie einen direkten Beweis, der für alle positiven reellen Zahlen a, b, c zeigt, dass

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Hinweis: Betrachten Sie das harmonische und arithmetische Mittel von $(a+b), (b+c)$ und $(c+a)$.

Aufgabe 3.4 Geben Sie eine rekursive Formel für die Anzahl $A(n)$ der Wörter der Länge n an, die aus den Buchstaben a, b und c zusammengesetzt werden können, wenn b niemals direkt auf b folgen darf. Vergessen Sie nicht auf die Basisfälle in der Lösung.

Aufgabe 3.5 Gegeben seien hinreichend viele Steine der Größe $2 \times 1 \times 1$ und $2 \times 2 \times 2$. Aus diesen soll nun ein Turm der Größe $2 \times 2 \times n$ gebaut werden, wobei aus Stabilitätsgründen die kleineren Steine nicht aufrecht verbaut werden dürfen. Gesucht ist eine rekursive Formel für die Anzahl der Möglichkeiten $M(n)$, so einen Turm mit Höhe n zu bauen. Vergessen Sie nicht auf die Basisfälle in der Lösung.

Aufgabe 3.6 Wir sagen, dass eine ganze Zahl $a \neq 0$ eine ganze Zahl b teilt, genau dann, wenn es eine ganze Zahl c gibt so, dass $b = a \cdot c$. Zeigen Sie: Für alle geraden natürlichen Zahlen n gilt, dass $n^3 - 2n^2$ von 16 geteilt wird.

Aufgabe 3.7 Wir betrachten die zweistellige Verknüpfung $\star$ auf $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, die mittels der bekannten Addition und Multiplikation wie folgt definiert ist

$$a \star b := ab + a + b.$$

Zeigen Sie, dass es sich bei $\star$ tatsächlich um eine innere Verknüpfung auf $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ handelt und dass $(\mathbb{R}\backslash\{-1\}, \star)$ eine abelsche Gruppe ist.

PS Diskrete Mathematik: Aufgabenblatt 4 für 04.04.2025

Aufgabe 4.1 **Teil 1:** Auf $\mathbb{R}$ definieren wir die Relation $\leqslant_*$ als

$$a \leqslant_* b \quad :\Leftrightarrow \quad b - a \text{ ist eine nicht-negative ganze Zahl.}$$

Ist diese Relation eine Halbordnung?
Teil 2: Auf den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ definieren wir die Relation $\leqslant_{**}$ als

$$a \leqslant_{**} b \quad :\Leftrightarrow \quad (0 \leqslant a \leqslant b \quad \vee \quad b \leqslant a < 0 \quad \vee \quad a < 0 \leqslant b).$$

Ist diese Relation eine strikte Halbordnung?

Aufgabe 4.2 Wir betrachten eine endliche (nicht-leere) Menge S mit einer strikten Halbordnung $\prec$. Eine topologische Sortierung $\lhd$ von S relativ zu $\prec$ ist eine totale Ordnung auf S so, dass

$$(\forall a, b \in S \;\; (a \prec b) \Rightarrow (a \lhd b)).$$

Sei nun $S := \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ und es gelte $a \prec b$, $c \prec d$, $e \prec f \prec g$, $j \prec i \prec h$, $f \prec b$, $f \prec d$, $f \prec h$, $g \prec h$. Finden Sie eine zu $\prec$ passende topologische Sortierung $\lhd$ von S. Ist sie eindeutig?

Aufgabe 4.3 Zeigen Sie, dass es bis auf Umbenennung der Elemente und Verknüpfungen höchstens einen Körper mit drei Elementen geben kann.

Aufgabe 4.4 Beweisen Sie unter direkter Benutzung des Wohlordnungsprinzips (N4) der natürlichen Zahlen, dass für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Aufgabe 4.5 Wir betrachten die Gitterpunkte $G := \{n \in \mathbb{N} : n \leqslant 100\} \times \{n \in \mathbb{N} : n \leqslant 100\}$ und nehmen an, dass ein Gitterpunkt $(i, j) \in G$ jeweils diagonal mit seinen (bis zu) vier Nachbarn $(i \pm 1, j \pm 1)$ mittels geradlinigen Bahnen verbunden ist. (Natürlich mit der Einschränkung, dass Bahnen nur zwischen Punkten aus G existieren.) Obwohl sich die Bahnen kreuzen, sind Bewegungen nur geradlinig entlang dieser Bahnen möglich. (Es ist also nicht möglich, von einem Gitterpunkt entlang einer V-artigen Trasse zu seinem horizontalen oder vertikalen Nachbarn zu gelangen.) Können wir vom Gitterpunkt $(1, 1)$ durch Bewegen entlang der Bahnen zum Gitterpunkt $(23, 32)$ gelangen? (Bitte beweisen Sie Ihre Antwort.)

Aufgabe 4.6 Für $n \in \mathbb{N}$ und n aussagenlogische Formeln $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ definieren wir die n-stellige Konjunktion rekursiv wie folgt:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \phi_i \;:\Longleftrightarrow \begin{cases} \phi_1 & \text{falls } n = 1, \\ (\phi_n \wedge \bigwedge_{i=1}^{n-1} \phi_i) & \text{falls } n > 1. \end{cases}$$

Wir betrachten nun $n + 1$ aussagenlogische Variable $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. Beweisen Sie, dass

$$x_{n+1} \vee \bigwedge_{i=1}^{n} x_i \;\equiv\; \bigwedge_{i=1}^{n} (x_{n+1} \vee x_i).$$

Aufgabe 4.7 Beweisen Sie die folgende Identität für Fibonacci-Zahlen für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $m \in \mathbb{N}_0$:

$$F_{n+m} = F_{n-1} \cdot F_m + F_n \cdot F_{m+1}.$$

PS Diskrete Mathematik: Aufgabenblatt 5 für 11.04.2025

Aufgabe 5.1 Konstruieren Sie eine Bijektion von der Menge der ungeraden natürlichen Zahlen in die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Zeigen Sie dabei, warum es sich tatsächlich um ein Bijektion handelt. Welche Kardinalität hat daher die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen?

Aufgabe 5.2 Beweisen Sie, dass folgende zwei Intervalle gleichmächtig sind, also gleiche Kardinalität haben: $]0,2[:= \{x \in \mathbb{R} \colon 0 < x < 2\}$ und $]0,3] := \{x \in \mathbb{R} \colon 0 < x \leqslant 3\}$.

Aufgabe 5.3 Beweisen oder widerlegen Sie folgende Eigenschaft der Teilbarkeit:

$$\forall x \in \mathbb{Z} \backslash \{0\} \;\; \forall y \in \mathbb{Z} \;\; x \mid y \wedge x \mid (y+1) \Rightarrow x \notin \mathbb{P}.$$

Aufgabe 5.4 Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$, mit Primfaktorzerlegung gemäß Fundamentalsatz der Arithmetik (Theorem 102) $n = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{m_k}$, wobei $p_1 < \ldots < p_k$ Primzahlen und $m_j \in \mathbb{N}$ Vielfachheiten sind, für alle $j = 1, \ldots, k$:

$$|\{t \in \mathbb{N} \colon t \mid n\}| = \prod_{j=1}^{k} (m_j + 1).$$

Überprüfen Sie anschließend die Formel für $n := 12$.

Aufgabe 5.5 Beweisen oder widerlegen Sie: Es gibt eine natürliche Zahl, deren Dezimaldarstellung (Darstellung zur Basis 10) aus der einzelnen Ziffer 1 gefolgt von m-mal der Ziffer 0 besteht, für ein $m \in \mathbb{N}$, und deren Hexadezimaldarstellung (Darstellung zur Basis 16) aus der einzelnen Ziffer 1 gefolgt von n-mal der Ziffer 0 besteht, für ein $n \in \mathbb{N}$. Ändert sich die Antwort, wenn stattdessen $m, n \in \mathbb{N}_0$ erlaubt ist?

Aufgabe 5.6 Sei $b \in \mathbb{N}$ mit $b > 1$. Wie lautet die größtmögliche Ziffer einer polyadischen Darstellung zur Basis b? Gegeben ist die Darstellung einer (natürlichen) Zahl zur Basis b mit n Ziffern, für ein $n \in \mathbb{N}$, wobei alle n Ziffern dabei jeweils die größtmögliche Ziffer zur Basis b seien. Verwenden Sie die Formel aus Aufgabe 4.4, um allgemein für unbestimmte b und n anzugeben, welchem dezimalen Wert eine solche Zahl entsprechen muss. Überprüfen Sie anschließend Ihre Lösung für $b := 8$ und $n := 3$.

Aufgabe 5.7 Beweisen oder widerlegen Sie:

$$\neg \exists n \in \mathbb{N} \;\; 267n \equiv_{291} 77.$$

PS Diskrete Mathematik: Aufgabenblatt 6 für 09.05.2025

Aufgabe 6.1 Ermitteln Sie jeweils die kompletten Lösungsmengen aller $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ für die beiden diophantischen Gleichungen:

1. 114x + 13y = 1
2. 72x + 6y = 4

Aufgabe 6.2 Beweisen Sie für beliebige $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{P}$ mit $p_1 \leqslant p_2$ und $p_3 \leqslant p_4$: Es gilt $p_1 \cdot p_2 = p_3 \cdot p_4$ genau dann, wenn $p_1 = p_3$ und $p_2 = p_4$.

Aufgabe 6.3 Für eine Feier wird Verpflegung vorbereitet. Es gibt drei Arten von Servierplatten:

1. Servierplatten mit je drei Brötchen,
2. Platten mit je acht Sektgläsern und
3. Platten mit je fünf Stück Kuchen.

Auf der Feier werden die Speisen und Getränke unter den Gästen verteilt, sodass jeder Gast sich genau ein Brötchen, ein Sektglas und ein Stück Kuchen nimmt. Nach der Feier kommen genau drei Tabletts in die Küche zurück, die nicht leer sind: eines mit einem Brötchen, eines mit drei Sektgläsern und ein letztes mit einem Stück Kuchen. Wie viele Gäste waren mindestens auf der Feier?

Aufgabe 6.4 Bestimmen Sie das multiplikative Inverse oder zeigen Sie, dass es nicht existiert:

1. von $[64]_{117}$ in $\mathbb{Z}_{117}$
2. von $[372]_{2025}$ in $\mathbb{Z}_{2025}$

Aufgabe 6.5 Auf einem $n \times n$-Schachbrett sind n Damen so zu platzieren, dass keine eine unmittelbare Bedrohung für eine andere darstellt. Zwei Damen bedrohen sich genau dann, wenn sie in einer Zeile oder Spalte des Schachbretts stehen oder wenn die Strecke zwischen ihnen parallel zu einer der Diagonalen des Schachbretts verläuft. Die Felder des Schachbretts werden bezeichnet durch die zugehörige Zeile und Spalte. Die Nummerierung der Zeilen und Spalten beginnt in der linken oberen Ecke mit 0 und endet mit $n - 1$. Zeigen Sie, dass folgende Vorgehensweise für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \equiv_6 1$ oder $n \equiv_6 5$ das gewünschte Ergebnis liefert: Die i-te Dame wird auf das Feld $(i \bmod n, 2i \bmod n)$ gestellt für $0 \leqslant i \leqslant n - 1$.

Aufgabe 6.6 Stellen Sie die periodische Dezimalzahl $2.2\overline{108}$ als vollständig gekürzten rationalen Bruch dar.

Aufgabe 6.7 Sei $r \in \mathbb{Q}, r \neq 0$ eine rationale Zahl mit $r = \frac{a}{b}$ wobei $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ und $\gcd(a, b) = 1$. Wir definieren folgende Zahl s wie folgt:

$$s := \frac{a^2 + b^2}{ab}.$$

Zeigen Sie:

1. $s \in \mathbb{Q}$.
2. s ist bereits in vollständig gekürzter Form.
3. Für $a \neq b$ und $a \neq -b$ gilt: $s \in \mathbb{Q} \backslash \mathbb{Z}$.

PS Diskrete Mathematik: Aufgabenblatt 7 für 16.05.2025

Aufgabe 7.1 Zeigen Sie, dass es zumindest abzählbar unendlich viele Paare (x, y) von irrationalen Zahlen x und y gibt, sodass x^y rational ist. (Dabei ist $x \neq y$ nicht gefordert!)

Aufgabe 7.2 Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a < c$ und $b < d$ legt das Quadrupel $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ das (achsenparallele, nicht-degenerierte) Rechteck

$$R_{a,b,c,d} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ (a \leqslant x \leqslant c) \wedge (b \leqslant y \leqslant d)\}$$

als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ fest. (Der Punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ entspricht also der linken, unteren Ecke des Rechtecks.) Beweisen Sie, dass man stets höchstens abzählbar unendlich viele Quadrupel aus $\mathbb{R}^4$ wählen kann, sodass alle dadurch (im $\mathbb{R}^2$) festgelegten Rechtecke paarweise disjunkt sind. (Falls hilfreich, dürfen Sie das Wissen $|\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}| = \aleph_0$ ohne Beweis benutzen.)

Aufgabe 7.3 In einem Kreis mit Durchmesser 1 werden fünf Punkte eingezeichnet. Zeigen Sie, dass (unabhängig von der konkreten Positionierung dieser Punkte) zumindest zwei dieser Punkte sicher einen Abstand haben, welcher höchstens $\frac{\sqrt{2}}{2}$ beträgt.

Aufgabe 7.4 Sei $\mathbb{B}$ die zweielementige Menge der Wahrheitswerte T und F. Wir definieren eine Funktion $even : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{B}$ induktiv wie folgt:

$$even(n) := \begin{cases} T & \text{falls} \quad n = 0 \\ F & \text{falls} \quad n = 1 \\ even(n-2) & \text{falls} \quad n > 1 \end{cases}$$

Wir behaupten nun, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$even(n) = T \quad \Rightarrow \quad even(n+1) = F.$$

Beweisen Sie diese Behauptung mittels wohlfundierter Induktion. (Sie sollen wirklich eine wohlfundierte Induktion verwenden, und nicht versuchen, die normale Induktion „geeignet anzupassen“!)

Aufgabe 7.5 Gemäß wohlfundierter Induktion gilt für ein wohlfundiertes $(M, \prec)$, dass

$$(\forall m \in M \ \ P(m)) \quad \text{falls} \quad (\forall m \in M \ \ (\forall (k \in M, k \prec m) \ \ P(k)) \Rightarrow P(m)).$$

Weiters wurde in der Vorlesung intuitiv begründet, dass für ein minimales n

$$(\forall (k \in M, k \prec n) \ \ P(k)) \Rightarrow P(n) \quad \text{äquivalent zu} \quad P(n)$$

ist. Beweisen Sie dies formal durch Anwendung der Schlussregeln der Prädikatenlogik.

Aufgabe 7.6 Beweisen Sie, dass die rekursive Definition

$$f(n, m) := \begin{cases} m & \text{falls } n = 0, \\ 2n & \text{falls } m = 0, \\ f(n-1, m+1) + 1 & \text{falls } n \cdot m > 0 \end{cases}$$

genau eine Funktion $f \colon \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ festlegt.

Aufgabe 7.7 Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.