PS Diskrete Mathematik: Aufgabenblatt 1 für 15.03.2024

Aufgabe 1.1 Formulieren Sie die gegebenen Aussagen in der Sprache der Prädikatenlogik (in der in VO+PS DM verwendeten Schreibweise).

1. Für jede reelle Zahl x gilt, dass $x \cdot 0$ sich zu 0 ergibt.
2. Zu jeder natürlichen Zahl n existiert eine natürliche Zahl m, welche größer als n ist.
3. Für jedes Element x aus der Menge G existiert ein reelles ϵ größer als 0 derart, sodass $K_\epsilon(x)$ eine Teilmenge von G ist.

Hinweis: Die Menge der natürlichen Zahlen bezeichnen wir mit $\mathbb{N}$; die Menge der reellen Zahlen mit $\mathbb{R}$.

Aufgabe 1.2 Beweisen Sie für aussagenlogische Variable p, q:

$$\neg p \equiv p \uparrow p \qquad p \wedge q \equiv (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q) \qquad p \vee q \equiv (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q) \qquad \top \equiv (p \uparrow (p \uparrow p))$$

Aufgabe 1.3 Ermitteln Sie mittels Wahrheitstabelle die vollständige DNF sowie die vollständige KNF des Ausdrucks $(\neg a \vee \neg b) \wedge \neg c$ mit aussagenlogischen Variablen a, b, c.

Aufgabe 1.4 Warum sind die folgenden Sätze der Umgangssprache problematisch?

1. Der Gewinner erhält ein wertvolles Geschenk und eine Fernreise oder einen Geldpreis.
2. Bei rotem und gelbem Licht hier halten.
3. Die Negationen der Aussage *Alle Menschen sind sterblich*:
   - Kein Mensch ist sterblich.
   - Alle Menschen sind unsterblich.

Aufgabe 1.5 Zeigen Sie mittels bekannter Umformungen (und daher ohne Wahrheitstabelle), ob die folgenden Aussagen Tautologien oder Kontradiktionen sind, wobei a und b aussagenlogische Variable sind.

1. $a \wedge (b \vee \neg a) \wedge \neg b$
2. $(\neg(a \Rightarrow b) \vee (\neg(b \vee a) \wedge (b \Leftrightarrow a))) \wedge b\,.$

Aufgabe 1.6 Wie lautet umgangssprachlich formuliert die Verneinung der Aussage „*Alle StudentInnen fahren mit dem Auto oder dem Zug zur Uni*“ ? Überprüfen Sie Ihre Negation, in dem Sie beide Aussagen mittels Prädikatenlogik formulieren.

Aufgabe 1.7 Seien P und Q einstellige Prädikate. Zeigen Sie, dass die folgenden Äquivalenzen gelten, sofern vorausgesetzt wird, dass die Quantoren jeweils Variable aus dem gleichen (nichtleeren) Gebiet binden:

1. $\big((\forall x \;\; P(x)) \wedge (\exists x \;\; Q(x))\big) \;\Leftrightarrow\; \big(\forall x \, \exists y \;\; (P(x) \wedge Q(y))\big)\,.$
2. $\big((\forall x \;\; P(x)) \vee (\exists x \;\; Q(x))\big) \;\Leftrightarrow\; \big(\forall x \, \exists y \;\; (P(x) \vee Q(y))\big)\,.$