VO „Diskrete Mathematik für Informatik"

Fragenkatalog

Dieser Katalog von Fragen zur Vorlesung „Diskrete Mathematik für Informatik" bietet einen Überblick über mögliche Prüfungsfragen. Er erhebt freilich keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Weiters behalte ich mir vor, ihn jederzeit zu modifizieren, alte Fragen zu streichen und neue Fragen aufzunehmen. Insbesondere kann es passieren, dass zu einer Prüfung Fragen kommen, welche noch gar nicht in diesem Katalog enthalten sind! Realistischerweise wird dies aber eher die Ausnahme als die Regel sein.

Frage 1:
Was versteht man unter einer Variation ohne Zurücklegen? Wieviele verschiedene derartige Variationen sind bei einer n-elementigen Grundmenge insgesamt möglich?

Frage 2:
Bei der Induktion haben wir explizit den Beweis eines Basisfalls verlangt: wenn ein Prädikat P für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten soll, ist beim Induktionsbeweis der Fall $n = 1$ explizit zu behandeln. Bei der wohlfundierten Induktion haben wir hingegen nicht explizit den Beweis eines Basisfalls verlangt. Warum ist der Basisfall bei der wohlfundierten Induktion trotzdem abdeckt? Kann es mehrere Basisfälle geben?

Frage 3:
Definieren Sie den Binomialkoeffizient.

Frage 4:
Ist ein jeder Baum ein planarer Graph? Argumentieren Sie Ihre Antwort. (Ja oder Nein reicht natürlich nicht!) Falls ja, so skizzieren Sie einen konstruktiven Beweis.

Frage 5:
Wie viele verschiedene Permutationen von n Buchstaben gibt es?

Frage 6:
Definieren Sie Binomialkoeffizienten rekursiv. Achten Sie auf eine formal-saubere Definition.

Frage 7:
Wie kann bei S_n (für $n \geq 2$) die Identität als Produkt von Transpositionen geschrieben werden?

Frage 8:
Wie wissen, dass Gleichheitszeichen bei der Landau-Notation mit Vorsicht zu betrachten sind. Wie ist

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \qquad \Theta(\log_\alpha n) = \Theta(\log_\beta n)$$

zu interpretieren?

Frage 9:
Erklären Sie, wie ein beliebiger zusammenhängender Graph $\mathcal{G}$ mit zumindest drei Knoten in einen Unterteilungsgraph $\mathcal{G}'$ transformiert werden kann, sodass $\chi(\mathcal{G}') = 2$ obwohl vielleicht $\chi(\mathcal{G}) > 2$.

Frage 10:
Beweisen Sie explizit: Falls eine Menge $K \neq \mathbb{N}$ induktiv ist, dann gilt $K = \mathbb{N}$.

Frage 11:
Wird $13 \cdot (13^{16} - 1)$ durch 17 ohne Rest geteilt? Warum (nicht)?

Frage 12:
Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$. Definieren Sie $\Theta(f)$.

Frage 13:
In der VO hatten wir folgende Charakterisierung eines Graphen $\mathcal{G}$, bei dem jeder Knoten mindestens Grad 1 hat: „Der Graph

$\mathcal{G}$ besitzt einen Eulerschen Weg (aber keine Eulersche Tour) genau dann wenn er zusammenhängend ist und wenn exakt zwei Knoten von $\mathcal{G}$ einen ungeraden Knotengrad hat.“ Warum ist dabei die Forderung essentiell, dass jeder Knoten von $\mathcal{G}$ mindestens Grad 1 hat?

Frage 14:
Beweisen oder widerlegen Sie: Die Zusammensetzung von zwei Permutationen ist kommutativ.

Frage 15:
Enthält ein vollständig-bipartiter Graph mit mindestens drei Knoten immer einen Hamiltonschen Kreis?

Frage 16:
Nennen Sie zumindest drei natürlichsprachliche Synonyme (in Dt.) für $A \Leftrightarrow B$.

Frage 17:
Wie kann man $\mathbb{Z}$ formal auf der Basis von $\mathbb{N}$ einführen?

Frage 18:
Seien $m, n, k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq m \leq k$ und $1 \leq n \leq k$. Formulieren Sie eine formal saubere Definition von $\sum_{i=m}^{n} a_i$ für k reelle Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$.

Frage 19:
Ermitteln Sie mit dem in der VO vorgestellten Algorithmus (x, y) als ein Lösungspaar der Diophantischen Gleichung $44x + 92y = 4$. (Es sind alle Rechenschritte gemäß VO anzugeben; Raten reicht natürlich nicht!)

Frage 20:
Was ist eine scharfe untere Schranke an die minimale Anzahl $k(n)$ der Kanten eines Graph $\mathcal{G}$ mit $n \geq 3$ Knoten, damit $\mathcal{G}$ einen Hamiltonschen Kreis enthalten kann? Sei nun $1 \leq m \leq 12$ Ihr Geburtsmonat und $k := m$ falls $m \geq 6$ und sonst $k := m + 6$. Skizzieren Sie ein Beispiel für einen derartigen Graph für $n := k$.

Frage 21:
Sei $\mathcal{G} = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Jemand behauptet, daß $\forall v \in V \quad \deg^-(v) > \deg^+(v)$. Ist dies möglich?

Frage 22:
Gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ stets zumindest einen Graph $\mathcal{G}$ mit n Knoten so, daß $\chi(\mathcal{G}) = n$?

Frage 23:
In der VO hatten wir folgende Charakterisierung eines Graphen $\mathcal{G}$, bei dem jeder Knoten mindestens Grad 1 hat: „Der Graph $\mathcal{G}$ besitzt eine Eulersche Tour genau dann wenn er zusammenhängend ist und wenn alle Knoten von $\mathcal{G}$ einen geraden Knotengrad hat.“ Warum ist dabei die Forderung essentiell, dass jeder Knoten von $\mathcal{G}$ mindestens Grad 1 hat?

Frage 24:
Es sei $t \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq t \leq 31$ der Tag Ihrer Geburt. Wir setzen $r := t + 17$. Gibt es $n, m \in \mathbb{N}$ so, dass $n \neq m$ und $3^r \mid (2^n - 2^m)$? Warum (nicht)?

Frage 25:
Was ist ein schlichter endlicher gerichteter Graph?

Frage 26:
Was besagt der Chinesische Restsatz?

Frage 27:
Geben Sie eine Verknüpfungstabelle einer dreielementigen Menge M so an, dass jede Zeile und jede Spalte dieser Tabelle jedes

Element von M genau einmal enthält, aber M mit dieser Verknüpfung trotzdem keine Gruppe bildet.

Frage 28:
Berechnen Sie mittels des erweiterten Euklidischen Algorithmus eine diophantische Lösung für $99x + 78y = 3$.

Frage 29:
Bedeutet "proof by exhaustion", daß Sie den Beweis physisch und/oder psychisch erschöpft abbrechen? Falls nein: Was bedeutet dies sonst?

Frage 30:
Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig aber fix mit $n > 1$. Beweisen oder widerlegen Sie: Falls der Graph $\mathcal{G}$ ungleich K_n ist, dann gilt $\chi(\mathcal{G}) < n$.

Frage 31:
Argumentieren Sie, warum ein zusammenhängender Graph genau dann bipartit ist, wenn seine chromatische Zahl gleich zwei ist.

Frage 32:
In der Vorlesung haben wir im Beweis, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, argumentiert, dass das um Eins vergrößerte Produkt aller (angenommen) endlich vielen Primzahlen wieder eine Primzahl sein muss. Nun gilt aber für das Produkt der ersten sechs Primzahlen plus Eins, dass dies keine Primzahl ist:

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509.$$

Warum steht dies nicht in Widerspruch zum Beweis aus der Vorlesung?

Frage 33:
Sei $\mathcal{G}$ ein Graph und $\mathcal{K}$ ein Hamiltonscher Kreis in $\mathcal{G}$. Ist $\mathcal{K}$ dann auch notwendigerweise eine Eulersche Tour in $\mathcal{G}$? Warum (nicht)?

Frage 34:
Auf Graphen erstellen wir eine Ordnung durch lexikographischen Vergleich der Knoten- und Kantenzahlen: für $\mathcal{G}_1 = (V_1, E_1)$ und $\mathcal{G}_2 = (V_2, E_2)$ haben wir

$$\mathcal{G}_1 \succ \mathcal{G}_2 \quad :\Longleftrightarrow \quad [(|V_1| > |V_2|) \;\vee\; (|V_1| = |V_2| \;\wedge\; |E_1| > |E_2|)].$$

Was ist gemäß dieser Ordnung der kleinste gerichtete Graph, welcher schwach zusammenhängend aber nicht stark zusammenhängend ist?

Frage 35:
Wir betrachten eine halbgeordnete Menge $(S, \succeq)$ und verlangen, daß jede nicht leere Teilmenge von S ein kleinstes Element hat. Muss S dann durch $\succeq$ sogar total geordnet sein? Warum (nicht)?

Frage 36:
Für welche Paare $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ ist das nachstehend definierte Prädikat P wahr?

$$P(n,m) :\Leftrightarrow \begin{cases} \top & \text{falls } n = m = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1, m\} \quad n \nmid m & \text{falls } n > 1 \text{ oder } m > 1. \end{cases}$$

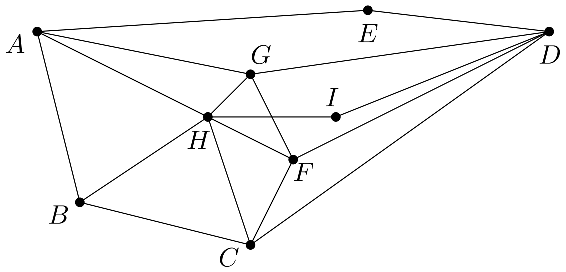
Frage 37:
Es ist leicht zu beweisen, dass Teilbarkeit eine partielle Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}$ bildet. (1) Ergibt sich sogar eine totale Ordnung? Warum (nicht)? (2) Bleibt Teilbarkeit eine Ordnungsrelation, wenn wir $\mathbb{N}$ durch $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ersetzen? Warum (nicht)?

Frage 38:
Existiert auf $\mathbb{Q}$ eine Wohlordnung? Falls nein, warum nicht? Falls ja, wie kann man auf $\mathbb{Q}$ eine Wohlordnung konstruieren?

Frage 39:

Sei $n \in \mathbb{N}$ die Mächtigkeit der endlichen Menge X und sei $R \subseteq X \times X$ eine totale Ordnung auf X. Wie viele Elemente enthält R in Abhängigkeit von n?

Frage 40:
Ist der nachstehend abgebildete Graph planar? Falls ja, dann zeichnen Sie eine planare Einbettung. Falls nein, dann argumentieren Sie, warum er nicht planar sein kann.



Frage 41:
Folgt aus dem schwachen Induktionsprinzip das starke Induktionsprinzip? Könnte man also einen Beweis auch mit dem starken Induktionsprinzip führen, wenn man ihn mit dem schwachen Induktionsprinzip geschafft hat? Warum (nicht)?

Frage 42:
Begründen Sie, warum eine strikte Halbordnung genau dann wohlfundiert ist, wenn keine unendlichen absteigenden Ketten existieren.

Frage 43:
Sei $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Knoten eines Graph. Existiert für jedes $n > 1$ zumindest ein Graph $\mathcal{G}$ so, dass $\chi(\mathcal{G}) = 1$?

Frage 44:
Wozu braucht man bei der in der Vorlesung gegebenen Definition der natürlichen Zahlen die Eigenschaft (N3)?
(N3) $\forall n \in \mathbb{N}, n \neq 1 \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad n = m + 1$

Frage 45:
Muß eine jede Wohlordnung eine totale Ordnung sein?

Frage 46:
Für ein $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir K_n. Kann man in $O(n^2)$ Zeit entscheiden, ob K_n einen Hamiltonschen Kreis enthält?

Frage 47:
Ist die Relation „ist Teilbaum von“ eine wohlfundierte Relation auf Wurzelbäumen? Warum (nicht)?

Frage 48:
Was versteht man unter „Kaskadieren“ bei Rekurrenzgleichungen? Lösen Sie damit die Rekurrenzgleichung $t_n = t_{n-1} + n$, wobei $t_0 := 0$.

Frage 49:
In der Vorlesung wurde für einen Wurzelbaum nicht explizit gefordert, daß er zyklenfrei ist, wenn man ihn als ungerichteten Graphen betrachtet. Gibt es tatsächlich Wurzelbäume, die Zyklen enthalten, wenn man sie als ungerichtete Graphen betrachtet? Warum (nicht)? Achtung: Einfach zu antworten, daß jeder Baum per definitionem zyklenfrei ist, reicht hier nicht!

Frage 50:
Wann ist eine Menge $K \subseteq \mathbb{N}$ induktiv?

Frage 51:
Beim Suchen einer Lösung für ein graphentheoretisches PS-Beispiel stossen Sie auf drei graphenartige Strukturen $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$, $\mathcal{G}_3$

(mit je zwölf Knoten), deren Knotengrade nachstehend angegeben sind. Angeblich handelt es sich bei diesen Strukturen jeweils um planare Graphen. Ist dies jeweils möglich?

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}
Knotengrade von $\mathcal{G}_1$	6	6	6	6	7	7	7	7	8	8	8	8
Knotengrade von $\mathcal{G}_2$	6	6	8	6	0	7	2	2	4	4	2	6
Knotengrade von $\mathcal{G}_3$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Frage 52:
Formulieren Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung, dass eine reelle Zahl eine eindeutige Dezimaldarstellung hat.

Frage 53:
Wann sind zwei Graphen isomorph? Was sind notwendige Bedingungen dafür?

Frage 54:
Welche Bedingungen müssen gelten, damit zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ relativ prim sind?

Frage 55:
Seien $a, b, m \in \mathbb{N}$ beliebig mit $m \geq 2$. Sei $r_1 \in \mathbb{N}_0$ der Rest von a bei Division durch m, und $r_2 \in \mathbb{N}_0$ der Rest von b bei Division durch m. Gilt stets $r_1 = r_2$ falls $a \equiv_m b$? Warum (nicht)?

Frage 56:
Wir wissen, daß $v - e + f = 2$ für planare Graphen gilt. Warum gilt dann $e \leq 2v - 4$ für alle dreiecksfreien planaren Graph mit $v \geq 3$?

Frage 57:
Aufgrund des Master Theorem wissen wir, dass $f \in \Theta(n^2)$ für $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(n) := 3f(n/2) + 7n^2 - 17n.$$

Was kann man deshalb für die asymptotische Komplexität von $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(n) := 3g(41 + n/2) + 3n^2 + 5n + 10$$

vermuten? Warum?

Frage 58:
Was ist der Koeffizient des Terms $a^4b^2cd^3$ in $(a+b+c+d)^{10}$? Bitte begründen Sie Ihre Antwort relativ zum Wissen aus der Vorlesung; natürlich reicht eine Zahl als Antwort nicht.

Frage 59:
Sei $\mathcal{G} := (V, E)$ ein schlichter, endlicher und gerichteter Graph, mit $V := \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Jemand behauptet, daß

$$\deg^-(v_1) = 2, \quad \deg^-(v_2) = 3, \quad \deg^-(v_3) = 5, \quad \deg^-(v_4) = 1, \quad \deg^-(v_5) = 1.$$

Ist dies möglich? Warum (nicht)?

Frage 60:
Was besagt das „Master Theorem“ („Hauptsatz der Laufzeitfunktionen“) der Rekurrenzgleichungen in seiner einfachsten Form?

Frage 61:
Wann ist ein Baum $\mathcal{T}$ ein Unterteilungsgraph des Graphen $\mathcal{G} := (V, E)$, wobei $V := \{u, v\}$ und $E := \{uv\}$?

Frage 62:
Was bedeutet es für die graphische Repräsentierung eines Graphen, wenn bekannt ist, daß er planar ist?

Frage 63:

Was besagt der Fundamentalsatz der Arithmetik?

Frage 64:
Sei A eine endliche Menge sowie $B \subseteq A$. Was gibt $\sum_{a \in A} 1_B(a)$ an?

Frage 65:
Welche Eigenschaften sind bei einer Halbordnung gefordert und was versteht man unter diesen Eigenschaften?

Frage 66:
Was bedeutet es für eine Zahl a, ein Primfaktor einer Zahl $b \in \mathbb{N}$ zu sein?

Frage 67:
Warum muss für zwei Graphen $\mathcal{G}_1 := (V_1, E_1)$ und $\mathcal{G}_2 := (V_2, E_2)$ zumindest $|V_1| = |V_2|$ gelten, damit $\mathcal{G}_1$ isomorph zu $\mathcal{G}_2$ sein kann?

Frage 68:
Jemand behauptet, dass für jedes Paar $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ die Diophantische Gleichung $a \cdot x + b \cdot y = 1$ (mit Variablen x, y) stets entweder gar keine oder abzählbar unendlich viele Lösungen hat. Warum stimmt dies (nicht)?

Frage 69:
Kann man im K_6 sechs Kanten so löschen, dass der resultierende Graph nicht planar ist?

Frage 70:
Demonstrieren Sie an einem Beispiel Ihrer Wahl, dass die in der Vorlesung definierte Äquivalenzklassenmultiplikation $\cdot_Z$ wohldefiniert ist, welche wir bei der Einführung von $\mathbb{Z}$ auf der Basis von $\mathbb{N}$ verwendet haben.

Frage 71:
Wir betrachten die Menge $M := \{0,1,2,3,4,5\}$ mit der durch die nachstehende Verknüpfungstabelle definierten Verknüpfung $\star$. Bildet $(M, \star)$ eine Gruppe? Warum (nicht)? Bildet $(M, \star)$ sogar eine abelsche Gruppe? Warum (nicht)?

$\star$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	3
5	0	5	4	3	2	1

Frage 72:
Sei $\mathcal{G} = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Jemand behauptet, daß $\forall v \in V \quad \deg^-(v) < \deg^+(v)$. Ist dies möglich?

Frage 73:
Seien $a,b,c,d,m \in \mathbb{N}$ beliebig mit $m \geq 2$. Gilt stets $a \cdot c \equiv_m b \cdot d$ falls $a \equiv_m b$ und $c \equiv_m d$? Warum (nicht)?

Frage 74:
Was bedeutet es, dass zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ kongruent modulo m für einen Modul $m \in \mathbb{N}$ sind?

Frage 75:
Wie sehen Sie die folgende Definition für ein Prädikat über $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$?

$$P(n,m) :\Leftrightarrow \begin{cases} \top & \text{falls } n = m = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1, m\} \quad n \nmid m & \text{falls } n > 1 \text{ oder } m > 1. \end{cases}$$

Frage 76:
Formulieren Sie unter Verwendung der vier Grundrechenoperationen für $n \in \mathbb{N}$ den Ausdruck $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ mathematisch

sauber. Mit welchem Operator kann dieser Ausdruck kurz dargestellt werden?

Frage 77:
Zeichnen Sie einen Wurzelbaum mit sechs Knoten, welcher nur ein Blatt hat.

Frage 78:
Erklären Sie das Prinzip der wohlfundierten Induktion.

Frage 79:
Was ist die kleinste Zahl an Farben, die jedenfalls reicht, um jeden planaren Graphen zu färben? Warum?

Frage 80:
Wir benutzen einen Umkehrschluss, um einen Existenzbeweis zu führen. Handelt es sich dann um einen konstruktiven Beweis? Warum (nicht)?

Frage 81:
Wir bezeichnen eine Zahl $x \in \mathbb{N}$ als Quadratzahl falls es eine Zahl $y \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $x = y^2$. Sei M die Menge aller Quadratzahlen. Gilt $|M| = \aleph_0$? Warum (nicht)?

Frage 82:
Angenommen, die Gleichung $1 = ax + by$ hat für zwei gegebene Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ eine Lösung $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. Ist diese Lösung dann notwendigerweise eindeutig über $\mathbb{Z}^2$?

Frage 83:
Sei $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Knoten eines Graph. Existiert für jedes $n > 1$ zumindest ein zusammenhängender Graph $\mathcal{G}$ so, dass $\chi(\mathcal{G}) = 2$?

Frage 84:
Ist in einem 3-regulären Graph die Anzahl der Kanten stets durch drei teilbar? Warum (nicht)?

Frage 85:
Was versteht man unter „Iterieren“ bei Rekurrenzgleichungen? Lösen Sie damit die Rekurrenzgleichung $t_n = t_{n-1} + n$, wobei $t_0 := 0$.

Frage 86:
Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Begriffen “Minimum” und “Infimum”?

Frage 87:
Wir bezeichnen als Gradvektor eines Graphen die aufsteigend sortierte Reihenfolge der Grade all seiner Knoten. Angenommen, zwei Graphen haben identische Gradvektoren. Müssen sie dann auch isomorph sein? Warum (nicht)?

Frage 88:
Beweisen Sie, daß ein jeder Baum ein planarer Graph ist.

Frage 89:
Sie möchten ein wertvolles Rad an einem Radständer anhängen und überlegen, ob Sie dazu zwei Ketten mit je einem vierstelligen Zahlenschloss oder eine Kette mit einem achtstelligen Zahlenschloss benutzen sollen. Welche dieser beiden Varianten wäre sicherer? (Natürlich gehen wir davon aus, dass mechanische Manipulationen an irgendeinem der beteiligten Teile unmöglich sind; Durchtrennen einer Kette oder Knacken eines Schlosses („lock picking“) sind also nicht in Betracht zu ziehen.)

Frage 90:

Warum muss für zwei Graphen $\mathcal{G}_1 := (V_1, E_1)$ und $\mathcal{G}_2 := (V_2, E_2)$ zumindest $|E_1| = |E_2|$ gelten, damit $\mathcal{G}_1 \simeq \mathcal{G}_2$ gelten kann?

Frage 91:
Bei einer Party sind die Gäste von der tollen Schallplattensammlung der Gastgeberin beeindruckt. Sie nehmen wiederholt zwei einzelne Platten aus der Sammlung und stecken sie dann wieder hinein. Die Gastgeberin beobachtet dieses Treiben mit Sorge, weil sie feststellt, daß jeweils bei jedem Herausnehmen/Hineinstecken die Position von zwei Platten vertauscht wird. Wie kann man dieses Vertauschen mathematisch charakterisieren? Warum ist dies wirklich ein Anlass zur Sorge für die Gastgeberin?

Frage 92:
Zeichnen Sie einen zusammenhängenden Graph, welcher einen Hamiltonschen Kreis hat, aber weder das Theorem von Ore noch das Theorem von Dirac erfüllt.

Frage 93:
Für $n, k \in \mathbb{N}$ betrachten wir n natürliche Zahlen sowie eine Zahl k mit $1 \leq k \leq n$. Was versteht man unter einem Zyklus der Länge k?

Frage 94:
Wir haben gesehen, dass ein Schubfachschluss zum Beweisen von manchen Existenzaussagen geeignet sein kann. Handelt es sich dabei um einen konstruktiven Beweis oder um einen reinen Existenzbeweis? *Warum?*

Frage 95:
Seien $a, b \in \mathbb{N}$ so, daß $\gcd(a, b) = 1$. Gibt es dann immer ein $x \in \mathbb{Z}$ so, dass $ax \equiv_b 1$?

Frage 96:
Auf $\mathbb{Z}$ betrachten wir die Relation $\not|$, welche wie folgt definiert ist: Für $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt $a \not| b$ genau dann wenn a kein echter Teiler von b ist. Handelt es sich bei $\not|$ um eine Äquivalenzrelation? Warum (nicht)?

Frage 97:
Wie kann man einfach (und mathematisch sauber) argumentieren, dass eine jede echte Teilmenge einer abzählbar unendlichen Menge stets endlich oder ebenfalls abzahlbär unendlich ist.

Frage 98:
Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig aber fix. Kann ein jeder k-reguläre Graph mit $k+1$ Farben gefärbt werden? Warum (nicht)?

Frage 99:
Wie kann man eine lineare homogene Rekurrenz mit konstanten Koeffizienten lösen? Skizzieren Sie das Vorgehen an der Rekurrenz $x_n = 3x_{n-1}$, wobei $x_0 := \frac{1}{3}$.

Frage 100:
Nennen Sie zumindest vier natürlichsprachliche Synonyme (in Dt.) für $A \Rightarrow B$.

Frage 101:
Angenommen, die Verknüpfungstabelle einer zweielementigen Menge M enthält in jeder Zeile und in jeder Spalte jedes Element von M genau einmal. Handelt es sich dabei stets um eine Gruppe? Um eine abelsche Gruppe?

Frage 102:
Wozu braucht man bei der in der Vorlesung gegebenen Definition der natürlichen Zahlen die Wohlordnungseigenschaft?

Frage 103:
Existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ stets ein Graph $\mathcal{G}$ mit n Knoten so, dass $\chi(\mathcal{G}) = m$? Warum (nicht)?

Frage 104:
Wir wissen, daß ein dreiecksfreier planarer Graph $\mathcal{G}$ zumindest einen Knoten vom Grad höchstens drei hat. Warum gilt dann

$\chi(\mathcal{G}) \leq 4$? Argumentieren Sie dies ohne Benutzung des Vierfarbensatzes.

Frage 105:
Was ist die allgemeinste Art von Graph mit n Knoten, sodaß man Knoten um Knoten insgesamt $n-1$ Knoten (samt den inzidenten Kanten) in zufälliger Reihenfolge entfernen kann, ohne jemals die Anzahl der Zusammenhangskomponenten zu erhöhen?

Frage 106:
Wie kann man den Körper der rationalen Zahlen formal einführen?

Frage 107:
Zeigen Sie: Wenn man in der total geordneten Menge $(S, \succeq)$ statt $\succeq$ die davon induzierte strikte Ordnung $\succ$ verwendet, dann kann sich das Infimum einer Menge $T \subset S$ ändern. (Wobei das Infimum relativ zu $\succ$ durch Ersetzen von $\succeq$ durch $\succ$ naheliegend definiert ist.)

Frage 108:
Was besagt das Siebprinzip für die n endlichen Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$? (Sie können sich bei der Antwort auf $n = 2$ und $n = 3$ beschränken.)

Frage 109:
Was ist ein Wurzelbaum?

Frage 110:
Warum wäre auf $(M, \prec)$ das Prinzip der wohlfundierten Induktion nicht anwendbar, wenn die strikte Halbordnung $\prec$ nicht wohlfundiert ist?

Frage 111:
Angenommen, wir glauben, daß $(\exists x\ A)$ nicht wahr ist. Kann man dies durch Angabe eines Gegenbeispiels beweisen?

Frage 112:
Was versteht man unter einer linearen homogenen Rekurrenz?

Frage 113:
Angenommen, jemand sagt Ihnen, dass die Zahlenfolge $50, 30, 20, 15$ den ersten vier Elementen der Folge $a \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ entspricht, welche durch eine lineare inhomogene Rekurrenz mit konstanten Koeffizienten der Ordnung eins beschrieben wird. Was ergibt sich als zu dieser Zahlenfolge passende Rekurrenzgleichung für a?

Frage 114:
Geben Sie jeweils ein Beispiel für ein explizite und eine rekursive Definition einer Folge $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ an. Bitte achten Sie darauf, dass bei beiden Definitionsarten die gleiche Folge spezifiziert wird.

Frage 115:
Wir interessieren uns für die Anzahl an Rechenschritten, die ein Algorithmus zum Verschlüsseln eines n-stelligen Passwortes über dem endlichen Alphabet Σ braucht. Wie kann man die durchschnittliche Anzahl an dafür benötigten Rechenschritten in Abhängigkeit von n sauber definieren?

Frage 116:
Formulieren Sie Rekurrenzgleichungen für die Anzahl der Ecken und die Anzahl der Kanten des Hyperwürfels Q_n für $n \in \mathbb{N}_0$.

Frage 117:
Gibt es unendlich viele Zahlen a, b, c, welche die Diophantische Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen?

Frage 118:
Auf $\mathbb{Z}$ betrachten wir die Relation $\nmid$, welche wie folgt definiert ist: Für $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt $a \nmid b$ genau dann wenn a kein echter Teiler

von b ist. Handelt es sich bei $\nmid$ um eine Halbordnung? Warum (nicht)?

Frage 119:
Was ist die allgemeinste Bedingung an einen zusammenhängenden Graphen, sodass er genau einen spannenden Baum enthält.

Frage 120:
Jemand vermutet, daß es zusammenhängende planare Graphen (mit $n \geq 3$ Knoten) gibt, in denen jeder Knotengrad größer oder zumindest gleich sechs ist. Beweisen oder widerlegen Sie diese Vermutung.

Frage 121:
Haben $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}^+$ die gleiche Kardinalität? Falls ja, so konstruieren Sie eine passende Bijektion und beweisen Sie, dass es sich um eine Bijektion handelt. Falls nein, dann begründen Sie, warum es sich um verschiedene Kardinalitäten handelt.

Frage 122:
Sei p eine beliebig aber fixe Primzahl. Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $0 < k < p$ beliebig aber fix. Teilt p immer $\binom{p}{k}$? Warum (nicht)?

Frage 123:
Wir wissen, daß ein jeder planare Graph vierfärbbar ist. Gilt auch die Umkehrung: Ist ein jeder vierfärbbare Graph auch stets planar? Warum (nicht)?

Frage 124:
Eine Landkarte verschiedener Regionen bildet eine planare Unterteilung der Ebene. Können alle Regionen mit insgesamt vier Farben so gefärbt werden, dass keine zwei Regionen, welche eine gemeinsame Grenze haben, mit der gleichen Farbe eingefärbt werden? Warum (nicht)? (Natürlich gelten einzelne isolierte Punkte, an denen drei oder mehr Regionen zusammentreffen, nicht als „gemeinsame Grenze“.)

Frage 125:
Für ein $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir K_n. Kann man in $O(n^2)$ Zeit entscheiden, ob K_n eine Euler Tour enthält?

Frage 126:
Seien $m, n, k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq m \leq k$ und $1 \leq n \leq k$. Formulieren Sie eine formal saubere Definition von $\prod_{i=m}^{n} a_i$ für k reelle Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$.

Frage 127:
Hat jede Permutation von n Zahlen zumindest einen Zyklus in ihrer Produktdarstellung?

Frage 128:
Wir betrachten eine Menge M mit einer strikten Halbordnung $\prec$. Welche Eigenschaft muß definitionsgemäß gelten, damit $\prec$ wohlfundiert ist?

Frage 129:
Wie kann man einfach prüfen, ob eine Rekurrenz homogen ist?

Frage 130:
Beweisen Sie direkt (ohne Rückgriff auf „schwerere Geschütze“ wie etwa den Vier-Farben-Satz oder den Fünf-Farben-Satz), dass jeder planare Graph mit maximal sechs Farben gefärbt werden kann.

Frage 131:
Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$. Definieren Sie $\Omega(f)$.

Frage 132:
Warum darf eine Definition eines neuen mathematischen Objektes nicht zu einem Widerspruch mit einer als wahr bekannten

Aussage führen?

Frage 133:
Angenommen, es ist Ihnen gelungen, einen Induktionsbeweis mittels schwacher Induktion zu führen. Könnten Sie ohne viel Nachdenken auch einen Beweis mittels starker Induktion führen? Falls nein: Warum nicht? Falls ja: Warum und wie?

Frage 134:
Beweisen oder widerlegen Sie: Gibt es in einem planaren Graphen von jedem Knoten zu jedem anderen Knoten (zumindest) zwei verschiedene Pfade, so hat dieser Graph keinen Schnittknoten.

Frage 135:
Was versteht man unter einer Fallunterscheidung in einem Beweis von $H \Rightarrow C$? Was ist dabei zu beachten?

Frage 136:
Für welche Werte von $n, m \in \mathbb{N}$ enthält $K_{n,m}$ immer einen Euler Weg, aber keine Euler Tour?

Frage 137:
Was ist ein Teilbaum eines Wurzelbaums?

Frage 138:
Was besagt das "Smoothness Theorem" und wie kann man es anwenden?

Frage 139:
Sei $\mathcal{G}$ ein Graph mit $n \geq 3$ Knoten, in dem alle Knoten einen Knotengrad größer oder gleich $\frac{n-1}{2}$ haben. Muss $\mathcal{G}$ dann zusammenhängend sein? Warum (nicht)?

Frage 140:
Für welche $n, m \in \mathbb{N}$ enhält $K_{m,n}$ einen Hamiltonschen Kreis?

Frage 141:
Wir beweisen die Behauptung

> „Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jede Menge von n paarweise verschiedenen und paarweise nicht-parallelen Geraden der Ebene gibt es stets einen Punkt, welcher auf allen Geraden liegt.“

mittels Induktion wie folgt:
IB: Diese Aussage ist offensichtlich korrekt für $n := 1$, weil jede Gerade zumindest einen Punkt enthält. Sie ist auch korrekt für $n := 2$, weil sich zwei nicht-parallele Geraden der Ebene stets in einem Punkt schneiden.
IH: Die Behauptung sei korrekt für ein beliebig aber fixes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ für alle Mengen von n Geraden, welche paarweise verschieden und nicht parallel sind.
IS: Seien $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n, \ell_{n+1}$ beliebig aber fixe $n+1$ Geraden, welche paarweise verschieden und nicht parallel sind. Gemäß Induktionsvoraussetzung haben die ersten n Geraden $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ einen Punkt p_1 gemeinsam. Ebenfalls gemäß Induktionsvoraussetzung haben die letzten n Geraden $\ell_2, \ldots, \ell_n, \ell_{n+1}$ einen Punkt p_2 gemeinsam. Die Geraden ℓ_2 und ℓ_n liegen in beiden Gruppen und enthalten daher sowohl p_1 und p_2. Da sich ℓ_2 und ℓ_n aber nur in einem Punkt schneiden, gilt $p_1 = p_2$. Also schneiden sich alle Geraden $\ell_2, \ldots, \ell_n, \ell_{n+1}$ im Punkt p_1.
Offensichtlich ist diese Behauptung inkorrekt. Was ist falsch an diesem Beweis?

Frage 142:
Wann ist ein Binärbaum perfekt balanziert?

Frage 143:
Was versteht man unter einer Kombination ohne Zurücklegen? Wieviele verschiedene derartige Kombinationen (mit verschiedenen Elementzahlen) sind bei einer n-elementigen Grundmenge insgesamt möglich?

Frage 144:

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \leq 25$ beliebig aber fix. Warum gilt

$$[\big((n+13) \bmod 26\big) + 13] \bmod 26 = n?$$

Frage 145:
In der VO haben wir diskutiert, dass die Zahl 1 zwar auch nur durch 1 und sich selbst teilbar ist, trotzdem aber keine Primzahl ist. Welche Aussage aus der VO wäre nicht mehr gültig (bzw. müßte umformuliert werden), falls man 1 als Primzahl ansehen möchte? (Ein Beispiel mit entsprechender Begründung reicht als Antwort.)

Frage 146:
Beweisen oder widerlegen Sie: Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und einen Graph $\mathcal{G}$ mit n Knoten, sodass bei $\mathcal{G}$ alle Knotengrade verschieden sind.

Frage 147:
Zeigen Sie, dass $\sqrt{5}$ keine rationale Zahl ist.

Frage 148:
Wie geht man bei einem indirekten Beweis von $H \Rightarrow C$ vor?

Frage 149:
Wie viele Kanten und Seitenflächen hat ein Polyeder mit 10 Ecken höchstens?

Frage 150:
Kann man im K_6 drei Kanten so löschen, dass der resultierende Graph planar ist? Warum (nicht)? Würde es reichen, nur zwei (geeignete) Kanten zu löschen? Warum (nicht)?

Frage 151:
Wir betrachten zwei Funktionen $f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $f(n) := 2n$ und $g(n) := \frac{1}{2} n \log n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist der Ausdruck $O(f) = O(g)$ korrekt? Wie ist dies zu interpretieren?

Frage 152:
Welche Eigenschaften sind bei einer strikten Halbordnung gefordert und was versteht man unter diesen Eigenschaften?

Frage 153:
Gemäß dem Vierfarbensatz kann jeder Graph mit vier Farben gefärbt werden, sofern er planar ist. Gilt auch die Umkehrung? Ist also jeder Graph zwangsläufig planar, wenn er mit vier Farben gefärbt werden kann? Warum (nicht)?

Frage 154:
Wie geht man bei einem Widerspruchsbeweis von $H \Rightarrow C$ vor?

Frage 155:
Berechnen Sie $\gcd(78, 99)$ mittels des Euklidischen Algorithmus.

Frage 156:
Gegeben sei ein Graph $\mathcal{G} = (V, E)$. Wie kann man algorithmisch in $O(|V| + |E|)$ Zeit alle Zusammenhangskomponenten von $\mathcal{G}$ ermitteln?

Frage 157:
Es sei $t \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq t \leq 31$ der Tag Ihrer Geburt. Definieren Sie die ganzen Zahlen N_t grösser gleich $-t$ in Analogie zu den in der VO diskutierten Peano Axiomen. Welche Mächtigkeit hat N_t? Warum?

Frage 158:

Welche drei Bedingungen müssen zumindest gelten, damit zwei Graphen isomorph sein können?

Frage 159:
Ist die Anzahl der Flächen einer planaren Einbettung eines planaren Graphen stets unabhängig von der konkret gewählten Einbettung? Warum (nicht)?

Frage 160:
Wie kann man für relativ prime Zahlen $m_1, m_2, \cdots, m_k \in \mathbb{N}$ eine Zahl $b \in \mathbb{Z}$ finden, die für gegebene $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$\begin{aligned} b &\equiv_{m_1} a_1 \\ b &\equiv_{m_2} a_2 \\ &\vdots \\ b &\equiv_{m_k} a_k \\ 0 \leq b &\leq -1 + \prod_{i=1}^{k} m_i \end{aligned}$$

Frage 161:
Skizzieren Sie einen gerichteten Graphen, welcher schwach zusammenhängend aber nicht stark zusammenhängend ist ist.

Frage 162:
Seien $a, b, c, d, m \in \mathbb{N}$ beliebig mit $m \geq 2$. Gilt stets $a - c \equiv_m b - d$ falls $a \equiv_m b$ und $c \equiv_m d$? Warum (nicht)?

Frage 163:
Ist ein zusammenhängender bipartiter Graph stets ein Baum? Warum (nicht)?

Frage 164:
Es sei $t \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq t \leq 31$ der Tag Ihrer Geburt. Berechnen Sie für $t + 1$ die additiv und multiplikativ inversen Elemente in $\mathbb{Z}_{41}$, falls sie existieren. Geben Sie die gesuchten Elemente in kanonischer Darstellung gemäß Lemma 80 an. Verwenden Sie zur Bestimmung des multiplikativ inversen Elementes — sofern es existiert — den Algorithmus aus der Vorlesung und protokollieren Sie die entsprechenden Rechenschritte.

Frage 165:
Was ist eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein Graph planar ist?

Frage 166:
Demonstrieren Sie an einem Beispiel Ihrer Wahl, dass die in der Vorlesung definierte Äquivalenzklassenaddition $+_Q$ wohldefiniert ist, welche wir bei der Einführung von $\mathbb{Q}$ auf der Basis von $\mathbb{Z}$ verwendet haben.

Frage 167:
Ist ein Baum stets ein planarer Graph? Warum (nicht)?

Frage 168:
Wir wissen, dass Quadratwurzelziehen keine Äquivalenztransformation ist. Was bedeutet dies konkret, wenn wir beim Lösen einer Ungleichung $a \leq b$ bei beiden Seiten die Quadratwurzel ziehen möchten? (Also $\sqrt{a}$ und $\sqrt{b}$ betrachten möchten.) Besteht diesbezüglich ein Unterschied zwischen dem Ziehen (auf beiden Seiten) einer Quadratwurzel und einer kubischen Wurzel? (Also zwischen $\sqrt{a}$ und $\sqrt{b}$ im Vergleich zu $\sqrt[3]{a}$ und $\sqrt[3]{b}$.)

Frage 169:
Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir eine Permutation α auf I_n in der üblichen Schreibweise:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \alpha(3) & \ldots & \alpha(n) \end{pmatrix}$$

Wie können Sie eine Permutation β festlegen, sodass $(\beta \circ \alpha)$ die Identität auf I_n beschreibt?

Frage 170:

Das Hasse-Diagramm wird üblicherweise als Graph so in die Ebene eingebettet, dass die Kanten (als Geradensegmente) gemäß einer klar vorgegebenen Art gezeichnet werden. Warum ist dies wichtig?

Frage 171:
Was ist ein minimal spannender Baum eines gewichteten Graphen?

Frage 172:
Sie möchten ein Polynom p für ein Argument $x \in \mathbb{Z}_m$ über $\mathbb{Z}_m$ auswerten, für ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2$. Natürlich gehören alle Koeffizienten von p zu $\mathbb{Z}_m$; also $p(x) := \sum_{i=0}^{k} a_k x^k$ mit $a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}_m$. Können Sie diese Auswertung normal über $\mathbb{Z}$ vornehmen und erst das Resultat modulo m nehmen, oder müssen Sie bei allen arithmetischen Operationen die speziellen Gesetze der Modulo-Arithmetik beachten? Warum?

Frage 173:
Seien $a \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{Z}$. Warum sind dann der Quotient und der Rest (bei Division von b durch a) eindeutig bestimmt?

Frage 174:
Wir betrachten die Verknüpfungstabelle einer endlichen Gruppe $(G, \star)$. Ist es garantiert, dass jede Zeile und jede Spalte dieser Tabelle jedes Element von G genau einmal enthält? Warum (nicht)?

Frage 175:
Sei (S, R) eine halbgeordnete Menge. Das Hasse-Diagramm von (S, R) wird üblicherweise so gezeichnet, dass alle orientierten Kanten nach oben zeigen. (Möglicherweise schräg nach oben, aber jedenfalls nicht nach unten.) Warum ist eine dafür passende Anordnung der Elemente von S als Punkte in der Ebene stets möglich?

Frage 176:
Was ist ein 2-balanzierter Baum?

Frage 177:
Es sei $t \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq t \leq 31$ der Tag Ihrer Geburt. Wir setzen $r := t + 7$. Definieren Sie die Funktion $f \colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit $f(n) := r^{(2^n)}$ rekursiv.

Frage 178:
Ist ein Baum mit mindestens zwei Knoten stets ein bipartiter Graph? Warum (nicht)?

Frage 179:
Wir wissen, daß $v - e + f = 2$ für planare Graphen gilt. Warum hat dann ein jeder dreiecksfreie planare Graph zumindest einen Knoten vom Grad höchstens drei?

Frage 180:
Um aus einem Irrgarten wieder hinaus zu finden, würden Sie vermutlich nach irgendeinem Schema vorgehen und nicht ziel- und planlos im Irrgarten herumirren. Welche Vorgehensweise ergibt sich in Graphenterminologie, wenn man den Irrgarten auf naheliegende Art als Graph modelliert?

Frage 181:
Bei einem Gesellschaftsspiel wählt Person X drei verschiedene Zahlen a_1, a_2, a_3 aus $\mathbb{N}$ aus und gibt sie bekannt. Sei $A := \{a_1, a_2, a_3\}$. Die Aufgabe von Person Y ist nun, aus A eine oder zwei oder drei Zahlen (ohne Zurücklegen) auszuwählen, sodass deren Summe durch 3 teilbar ist. Ist dies immer möglich?

Frage 182:
Zeichnen Sie einen Binärbaum, welcher balanziert aber nicht perfekt balanziert ist.

Frage 183:

Warum gilt $(a \cdot b) \bmod m = (a \bmod m) \cdot (b \bmod m) \bmod m$ für alle $a, b \in \mathbb{N}$ und alle $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$?

Frage 184:
Was ist ein schlichter endlicher ungerichteter Graph?

Frage 185:
Sei $\mathcal{G}$ ein Graph und $\mathcal{T}$ eine Eulersche Tour in $\mathcal{G}$. Ist $\mathcal{T}$ dann auch notwendigerweise ein Hamiltonscher Kreis in $\mathcal{G}$? Warum (nicht)?

Frage 186:
In der VO haben wir diskutiert, wie man auf $\mathbb{Q}$ eine Wohlordnung festlegen kann. Wie geht dies? Erklären Sie dies detailliert.

Frage 187:
Was besagt das Theorem von Kuratowski?

Frage 188:
Was bedeutet es für eine Zahl $a \in \mathbb{R}$, ein Primfaktor der Vielfachheit k einer Zahl $b \in \mathbb{N}$ zu sein?

Frage 189:
Wir betrachten eine Gruppe $(G, *)$ für eine endliche Menge G. Ist dann garantiert, dass in der sich für $(G, *)$ ergebenden Verknüpfungstabelle jedes Element von G pro Zeile genau einmal als Resultat der Verknüpfung vorkommt? Warum (nicht)?

Frage 190:
Wir betrachten einen Graph $\mathcal{G}$, bei dem jeder Knoten zumindest Grad 2 hat. Enthält $\mathcal{G}$ dann immer einen Zyklus? Warum (nicht)?

Frage 191:
Sei $\mathcal{G} := (V, E)$ ein gerichteter Graph. Auf V definieren wir eine Relation R wie folgt: $x\, R\, y$ genau dann für Knoten $x, y \in V$ wenn es einen Pfad gibt, welcher in x startet und in y endet. Ist diese Relation reflexiv? Symmetrisch? Anti-symmetrisch? Transitiv?

Frage 192:
Für welche $n, m \in \mathbb{N}$ enhält $K_{m,n}$ einen Hamiltonschen Kreis?

Frage 193:
Person A behauptet, dass der Term $n^2 + n + 41$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ stets eine Primzahl liefert und unterstreicht diese Behauptung mittels der (korrekten) Aussage, dass dies jedenfalls für alle $0 \leq n \leq 20$ stimmt. Person B zweifelt trotzdem, dass diese Behauptung korrekt ist.
Wer hat Recht? Wie können Sie diese Frage entscheiden?

Frage 194:
Jemand formuliert ein Prädikat P über $\mathbb{N}$ und fragt, ob sich zumindest eine natürliche Zahl finden läßt, sodaß P wahr ist. Nach einigem Nachdenken entwickeln Sie einen Algorithmus, mit dessen Hilfe Sie eine geeignete Zahl bestimmen können. Was für einen Beweis aus der Sicht der Beweistheorie haben Sie damit erbracht?

Frage 195:
Was besagt die Eulersche Formel für planare Graphen? Gilt diese Formel auch für Bäume?

Frage 196:
Zeichnen Sie einen zusammenhängenden Graph, welcher einen Hamiltonschen Kreis hat, sodass zwar das Theorem von Ore erfüllt ist, nicht aber das Theorem von Dirac.

Frage 197:
Welche der folgenden Antworten ist richtig? In einem Graph

- ist die Summe der Knotengrade stets gerade,

- ist die Summe der Knotengrade stets ungerade,
- kann die Summe der Knotengrade sowohl gerade wie auch ungerade sein.

Frage 198:
Was ist die chromatische Zahl eines Graph?

Frage 199:
Was besagt das Schubfachschluss-Prinzip?

Frage 200:
Wir betrachten die Menge $X := \{1,2,3,4,5\}$ sowie die Ordnungsrelation

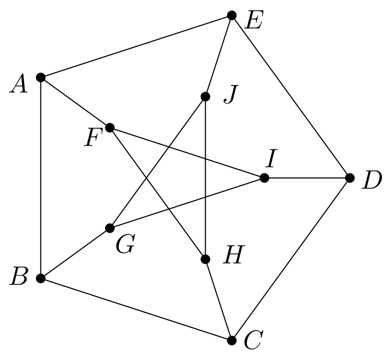
$$R := \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,3),(5,3),(2,1),(5,4),(2,5),(2,4),(2,3),(1,5),(1,4),(4,3)\}.$$

Handelt es sich bei R um eine totale Ordnung? Warum (nicht)? Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm dieser Ordnung, falls es sich zumindest um eine partielle Ordnung handelt.

Frage 201:
Wie kann man durch Lösen einer diophantischen Gleichung überprüfen, ob zwei Zahlen $a,b \in \mathbb{N}$ relativ prim sind?

Frage 202:
Warum ist eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ genau dann durch 6 teilbar, wenn sie sowohl durch 2 wie auch durch 3 teilbar ist?

Frage 203:
Ist der nachstehend abgebildete Graph planar? Falls ja, dann zeichnen Sie eine planare Einbettung. Falls nein, dann argumentieren Sie, warum er nicht planar sein kann.



Frage 204:
Was versteht man unter „konstruktiver Induktion“?

Frage 205:
Gemäß der Identität von Bézout gibt es für alle $a,b \in \mathbb{N}$ stets $x,y \in \mathbb{Z}$ so, dass $\gcd(a,b) = ax + by$. Beweisen Sie diese Aussage für alle $a,b \in \mathbb{N}$ unter der Annahme, dass sie für alle $a',b' \in \mathbb{N}$ mit $\gcd(a',b') = 1$ gilt.

Frage 206:
Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$. Definieren Sie $o(f)$.

Frage 207:
Wie kann ein Binomialkoeffizient rasch durch Addition zweier anderer Binomialkoeffizienten berechnet werden?

Frage 208:
Was bedeutet „wohldefiniert“?

Frage 209:

Wir wissen, dass die sortierten Reihenfolgen der Knotengrade zweier Graphen $\mathcal{G}_1$ und $\mathcal{G}_2$ identisch sein müssen, damit $\mathcal{G}_1 \simeq \mathcal{G}_2$ gilt. Gilt auch die Umkehrung? Warum (nicht)? Bitte begründen Sie Ihre Antwort durch Angabe eines Beweises oder eines Gegenbeispiels!

Frage 210:
Sei $n \in \mathbb{N}$. Was versteht man unter der symmetrischen Gruppe S_n?

Frage 211:
Sei $n \in \mathbb{N}$. Wie viele Elemente enthält S_n?

Frage 212:
Wir betrachten eine Menge S mit einer Halbordnung $\succeq$, sowie eine nichtleere Teilmenge T von S. Ist jedes kleinste Element von T auch ein minimales Element von T?

Frage 213:
Konvertieren Sie 281 in eine Darstellung zur Basis 3. (Natürlich reicht das Endergebnis allein nicht, sondern es sind alle für eine händische Rechung nötigen Rechenschritte anzugeben!)

Frage 214:
Was ist der kleinste drei-reguläre Graph? Geben Sie also $\mathcal{G} := (V,E)$ so an, dass $\mathcal{G}$ drei-regulär ist und dass $|V| + |E|$ kleinstmöglich ist. Begründen Sie weiters, warum Ihr Graph tatsächlich der kleinste drei-reguläre Graph ist.

Frage 215:
Was ergibt sich für die Mächtigkeit der Potenzmenge einer n-elementigen Menge (in Abhängigkeit von n)? Überprüfen Sie Ihre Antwort für $n := 3$.

Frage 216:
Angenommen, jemand sagt Ihnen, dass die Zahlenfolge $0, 1, 7, 44, 273, 1691$ den ersten sechs Elementen der Folge $a\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ entspricht, welche durch eine lineare homogene Rekurrenz mit konstanten Koeffizienten der Ordnung zwei beschrieben wird. Was ergibt sich als Rekurrenzgleichung für a?

Frage 217:
An der Eingangstür von so mancher Mathematikbibliothek findet man den folgenden durchaus ernst gemeinten Hinweis: „Achtung: Transpositionen erzeugen die symmetrische Gruppe!“ Was bedeutet dies?

Frage 218:
Ist die Zahlenfolge, die ein linearer Kongruenzgenerator erzeugt, immer periodisch? Warum (nicht)? Falls ja, wie lange kann die Periode in Abhängigkeit vom Modul m maximal sein?

Frage 219:
Für welche Werte von $n, m \in \mathbb{N}$ enthält $K_{n,m}$ immer eine Euler Tour?

Frage 220:
Was versteht man unter einer Indikatorfunktion?

Frage 221:
Bestimmen Sie die Kardinalität der Menge der natürlichen Zahlen kleiner oder gleich 200, welche durch zumindest eine der Zahlen aus der Menge $\{2, 3, 9, 11\}$ teilbar sind. Bitte verwenden Sie dazu die in der Vorlesung gelehrten Methoden. (Aufschreiben und/oder Durchprobieren reicht natürlich nicht!)

Frage 222:
Leider ist die Definition von $\mathbb{N}$ nicht einheitlich, wird aber trotzdem oft nicht explizit angegeben. Worauf kann man achten, um

aus dem Kontext zu erkennen, ob $0 \in \mathbb{N}$?

Frage 223:
Was ist an folgendem Induktionsbeweis der Aussage

> „Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: Alle Punkte einer beliebigen Menge von n Punkten der Ebene liegen stets auf einer Gerade!"

falsch?
IB: Die Aussage gilt offenbar für $n = 1$ und $n = 2$.
IH: Die Aussage gelte für ein beliebig aber fixes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.
IS: Wir betrachten $n+1$ beliebig aber fixe Punkte $p_1, p_2, \ldots, p_n, p_{n+1}$ der Ebene. Gemäß IH liegen die Punkte $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n$ auf einer Gerade, welche wir g nennen. Ebenfalls gemäß IH liegen die Punkte $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_{n+1}$ auf einer Gerade, welche wir h nennen. Da g und h beide durch p_1 und p_2 gehen, sind diese beiden Geraden ident und die Punkte $p_1, p_2, \ldots, p_n, p_{n+1}$ liegen daher auf einer Gerade.

Frage 224:
Beweisen Sie für $a, b, r \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{Z}$, daß $\gcd(a, b) = \gcd(b, r)$ falls $a = bq + r$.

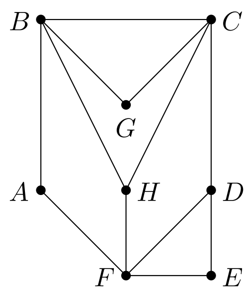
Frage 225:
Wie kann man auf $\mathbb{Z}$ eine Wohlordnung festlegen?

Frage 226:
Beweisen Sie formal, daß ein jedes Minimum einer halbgeordneten Menge auch ein minimales Element dieser Menge ist.

Frage 227:
Bei verschachtelten Definitionen ist es teils gar nicht so einfach, sofort zu erkennen, ob es sich um explizite oder rekursive Definitionen handelt. Da kann es eventuell schon kompliziert werden, Definiens und Definiendum korrekt zu identifizieren. Nach welchem mathematischen Vorgehensschritt kann man Ausschau halten, um dies doch einfach zu erkennen? Was muß bei einer rekursiven Definition immer angegeben werden, was bei einer expliziten Definition fehlt?

Frage 228:
Existiert auf $\mathbb{Z}$ eine Wohlordnung? Falls nein, warum nicht? Falls ja, dann geben Sie für $\mathbb{Z}$ eine Wohlordnung formal sauber an.

Frage 229:
Enthält der nachstehend abgebildete Graph (1) einen Eulerschen Weg, (2) eine Eulersche Tour, (3) einen Hamiltonschen Pfad, (4) einen Hamiltonschen Kreis? Warum (nicht)?



Frage 230:
Was ist ein Unterteilungsgraph?

Frage 231:
Was versteht man unter einem Umkehrschluss? Wie kann man damit etwa einen Existenzbeweis führen?

Frage 232:
Was versteht man unter einem Gegenbeispiel? Illustrieren Sie diesen Beweisansatz an einem Beispiel Ihrer Wahl.

Frage 233:
Beim Beweis einer Allaussage über eine Variable x aus einem Universum U, etwa $\forall x \in U\ P$, greift man gerne zur mathematischen

Formulierung "sei $x_0 \in U$ beliebig aber fix". Warum ist es aus mathematischer Sicht dabei essentiell, dass das Symbol x_0 nirgends sonst im Beweis bereits vorkam?

Frage 234:
Wir betrachten zwei Graphen $\mathcal{G}_1 := (V_1, E_1)$ und $\mathcal{G}_2 := (V_2, E_2)$ mit $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Damit konstruieren wir einen Graph $\mathcal{G} := (V, E)$ wie folgt:

$$V := V_1 \cup V_2 \qquad \text{und} \qquad E := E_1 \cup E_2 \cup \{(v_1, v_2)\colon\ v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$$

Gilt nun stets $\chi(\mathcal{G}) = \chi(\mathcal{G}_1) + \chi(\mathcal{G}_2)$? Warum (nicht)?

Frage 235:
Was versteht man unter $\mathbb{Z}_m$?

Frage 236:
Ist eine strikte Halbordnung immer asymmetrisch? Warum (nicht)?

Frage 237:
Wir bezeichnen für $n \in \mathbb{N}_0$ mit F_n die n-te Fibonacci Zahl. Argumentieren Sie, dass $F_n \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq 5$. .

Frage 238:
Bildet $(\mathbb{Z}_\mathbf{m}, +_\mathbf{m}, \cdot_\mathbf{m})$ für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2$ immer einen Körper? Warum (nicht)?

Frage 239:
Jemand behauptet, dass eine differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Intervall $[0,2]$ ein lokales Extremum oder einen Wendepunkt aufweist. Als Beweis führt diese Person folgendes an:

> Differenzieren von f liefert $f'(x) = x^2 - 4x + 3$ und daher insbesondere $f'(0) = 3$ und $f'(2) = -1$. Aus dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen folge damit sofort die Behauptung.

Um welche Art von Beweis handelt es sich dabei? Geben Sie weiters für diese Behauptung (und mit Benutzung des von der Person angeführten Wissens) einen Beweis dieser Behauptung an, welcher eine grundlegend verschiedene Charakteristik aufweist.

Frage 240:
Was versteht man unter einer Permutation von n Zahlen?

Frage 241:
Gilt $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$? Warum (nicht)?

Frage 242:
Folgt aus dem starken Induktionsprinzip das schwache Induktionsprinzip? Warum (nicht)?

Frage 243:
Wie ist der Ausdruck $O(n \cdot \sqrt{n} \cdot \log(\log n)) = O(n^2)$ zu interpretieren? Was bedeutet er (nicht)? Ist er bei der einzig möglichen Interpretation korrekt? Warum (nicht)?

Frage 244:
Sei $1 \leq m \leq 12$ Ihr Geburtsmonat und $r := m + 7$. Welche der folgenden diophantischen Gleichungen hat eine Lösung?

$$7x + 2y = r \qquad 44x + 66y = r$$

Falls für eine Gleichung Lösungen existieren, so geben Sie ein passendes Paar $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ an. Andernfalls erklären Sie, warum keine Lösung existieren kann.

Frage 245:
Zum Beweis von $H \Rightarrow C$ nehmen wir eine leicht überprüfbare wahre Aussage R, wie etwa $0 \neq 1$, und leiten aus $(H \wedge \neg C)$ damit

$\neg R$ her. Haben wir damit einen Beweis von $H \Rightarrow C$ geschafft? Warum (nicht)?

Frage 246:
Was versteht man unter einer Variation mit Zurücklegen?

Frage 247:
Demonstrieren Sie an einem Beispiel Ihrer Wahl, dass die in der Vorlesung definierte Restklassenmultiplikation $\cdot_m$ in $\mathbb{Z}_m$ für $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 3$ wohldefiniert ist.

Frage 248:
Sei $\mathcal{G}$ ein Graph. Ist jeder Zyklus in $\mathcal{G}$ automatisch auch eine Tour in $\mathcal{G}$? Warum (nicht)?

Frage 249:
Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$. Definieren Sie $O(f)$.

Frage 250:
Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$. Wir nennen eine k-elementige Folge $< a_1, a_2, \ldots, a_k >$ von k natürlichen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_k$ strikt sortiert falls $a_i < a_{i+1}$ für alle $1 \leq i < k$. Es sei nun $t \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq t \leq 31$ der Tag Ihrer Geburt und wir setzen $n := t + 19$. Weiters sei $1 \leq m \leq 12$ Ihr Geburtsmonat und wir setzen $k := m + 5$. Wieviele k-elementige, strikt sortierte Folgen können Sie mit Zahlen aus $\{1, 2, \ldots, n\} \subset \mathbb{N}$ bilden?

Frage 251:
Was bedeutet die Terminologie „O.B.d.A.“? In welcher Situation darf sie eingesetzt werden?

Frage 252:
Was muß für die Knotenzahl n eines Graph $\mathcal{G}$ jedenfalls gelten, falls jeder Knoten von $\mathcal{G}$ den Grad 37 hat.

Frage 253:
Auf Graphen erstellen wir eine Ordnung durch lexikographischen Vergleich der Knoten- und Kantenzahlen: für $\mathcal{G}_1 = (V_1, E_1)$ und $\mathcal{G}_2 = (V_2, E_2)$ haben wir

$$\mathcal{G}_1 \prec \mathcal{G}_2 \quad :\Longleftrightarrow \quad [(|V_1| < |V_2|) \ \vee \ (|V_1| = |V_2| \ \wedge \ |E_1| < |E_2|)].$$

Ist diese Ordnung wohlfundiert?

Frage 254:
In der VO haben wir die Theoreme von Dirac und Ore besprochen. Welches Theorem ist dabei die Verallgemeinerung des anderen? Warum?

Frage 255:
Für $a, b \in \mathbb{N}$ seien $q, r \in \mathbb{N}_0$ so, dass $b = aq + r$ und $0 \leq r < a$. Weiters $q' := \lfloor \frac{b}{a} \rfloor$ und $r' := b - q'a$. Gilt $q = q'$ und $r = r'$?

Frage 256:
Ist jede totale Ordnung auch eine Wohlordnung?

Frage 257:
Muß ein Graph notwendigerweiser zusammenhängend sein, wenn er eine Euler Tour enthält? Warum (nicht)?

Frage 258:
Wir haben in der VO die ganzen Zahlen als Äquivalenzklassen von natürlichen Zahlen eingeführt und dann die „übliche“ Arithmetik auf diesen Äquivalenzklassen definiert. Dabei haben wir allerdings eine wichtige Eigenschaft nicht bewiesen. Was wäre zu beweisen gewesen?

Frage 259:
Für $a, b \in \mathbb{R}$ definieren wir die Funktion $f_{a,b} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als $f_{a,b}(x) := a \cdot x + b$. Sei $M := \{f_{a,b} \colon a, b \in \mathbb{R}\}$.

(1) Bildet M mit der Addition von Funktionen als Verknüpfung eine abelsche Gruppe? Warum (nicht)?
(2) Bildet M mit der Multiplikation von Funktionen als Verknüpfung eine abelsche Gruppe? Warum (nicht)?

Frage 260:
Was versteht man unter struktureller Induktion?

Frage 261:
Kann ein Graph mit 572 Knoten und 570 Kanten zusammenhängend sein? Warum (nicht)?

Frage 262:
Muss eine jede wohlfundierte Ordnung eine totale Ordnung sein?

Frage 263:
Warum garantiert die Forderung in der Definition von $\mathbb{N}$, dass jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$ ein Minimum enthält, dass jede natürliche Zahl von der Form $(\ldots(((1+1)+1)+1)+\ldots+1)$ ist? (Also ein Nachfolger eines Nachfolgers (eines Nachfolgers ...) von 1 ist.)

Frage 264:
Was bedeutet es für einen Graph, dreiecksfrei zu sein?

Frage 265:
Sei $\mathcal{G} = (V,E)$ ein gerichteter Graph, mit $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Wir wissen, daß $\deg^+(v_1) = 2$, $\deg^+(v_2) = 3$, $\deg^+(v_3) = 4$, $\deg^+(v_4) = 0$, $\deg^+(v_5) = 1$. Was folgt daraus für die Kantenmenge E?

Frage 266:
Gilt $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$? Warum (nicht)?

Frage 267:
Beweisen Sie: $\forall a,b,c \in \mathbb{Z} \quad (a \mid b \land a \mid c) \Rightarrow [\forall s,t \in \mathbb{Z} \quad a \mid (bs+ct)]$.

Frage 268:
Für beliebige $a,b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt bekanntlicherweise gemäß dem Binomischen Lehrsatz $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$. Nun gilt zwar $(a+b)^n = (b+a)^n$, aber für $(b+a)^n$ liefert der Binomische Lehrsatz $(b+a)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} b^{n-i} a^i$ — also offenbar ein anderes Ergebnis. Wie erklärt sich dies? Wieso?

Frage 269:
Person A formuliert eine Definition, um reellen Zahlen eine Eigenschaft X zuzuweisen. Person B vermutet, daß es genau eine Zahl aus $\mathbb{R}$ gibt, die die Eigenschaft X aufweist. Was wäre zum Beweis dieser Vermutung zu zeigen?

Frage 270:
Wie viele Knoten hat ein 4-regulären Graph mindestens? Gibt es einen 4-regulären Graph mit dieser Anzahl an Knoten? Warum (nicht)?

Frage 271:
Zeichnen Sie für alle $i \in \{1,2,3,4\}$ je einen planaren Graphen $\mathcal{G}_i$ mit jeweils sechs Knoten und möglichst wenig Kanten so, dass $\chi(\mathcal{G}_i) = i$.