VO „Diskrete Mathematik für Informatik“

Fragenkatalog

Dieser Katalog von Fragen zur Vorlesung „Diskrete Mathematik für Informatik“ bietet einen Überblick über mögliche Prüfungsfragen. Er erhebt freilich keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Weiters behalte ich mir vor, ihn jederzeit zu modifizieren, alte Fragen zu streichen und neue Fragen aufzunehmen. Insbesondere kann es passieren, dass zu einer Prüfung Fragen kommen, welche noch gar nicht in diesem Katalog enthalten sind! Realistischerweise wird dies aber eher die Ausnahme als die Regel sein.

Frage 1:
Welche Eigenschaften sind bei einer Halbordnung gefordert und was versteht man unter diesen Eigenschaften?

Frage 2:
Welche Eigenschaften sind bei einer strikten Halbordnung gefordert und was versteht man unter diesen Eigenschaften?

Frage 3:
Ist eine strikte Halbordnung immer asymmetrisch? Warum (nicht)?

Frage 4:
Wir betrachten eine Menge S mit einer Halbordnung $\succeq$, sowie eine nichtleere Teilmenge T von S. Ist jedes kleinste Element von T auch ein minimales Element von T?

Frage 5:
Beweisen Sie formal, daß ein jedes Minimum einer halbgeordneten Menge auch ein minimales Element dieser Menge ist.

Frage 6:
Formulieren Sie unter Verwendung der vier Grundrechenoperationen für $n \in \mathbb{N}$ den Ausdruck $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ mathematisch sauber. Mit welchem Operator kann dieser Ausdruck kurz dargestellt werden?

Frage 7:
Leider ist die Definition von $\mathbb{N}$ nicht einheitlich, wird aber trotzdem oft nicht explizit angegeben. Worauf kann man achten, um aus dem Kontext zu erkennen, ob $0 \in \mathbb{N}$?

Frage 8:
Wozu braucht man bei der in der Vorlesung gegebenen Definition der natürlichen Zahlen die Eigenschaft (N3)?
(N3) $\forall n \in \mathbb{N}, n \neq 1 \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad n = m+1$

Frage 9:
Warum ist eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ genau dann durch 6 teilbar, wenn sie sowohl durch 2 wie auch durch 3 teilbar ist?

Frage 10:
Wozu braucht man bei der in der Vorlesung gegebenen Definition der natürlichen Zahlen die Wohlordnungseigenschaft?

Frage 11:
Wann ist eine Menge $K \subseteq \mathbb{N}$ induktiv?

Frage 12:
Beweisen Sie explizit. Falls eine Menge $K \neq \mathbb{N}$ induktiv ist, dann gilt $K = \mathbb{N}$.

Frage 13:
Warum darf eine Definition eines neuen mathematischen Objektes nicht zu einem Widerspruch mit einer als wahr bekannten Aussage führen?

Frage 14:

Folgt aus dem starken Induktionsprinzip das schwache Induktionsprinzip? Warum (nicht)?

Frage 15:
Folgt aus dem schwachen Induktionsprinzip das starke Induktionsprinzip? Warum (nicht)?

Frage 16:
Wie kann man $\mathbb{Z}$ formal auf der Basis von $\mathbb{N}$ einführen?

Frage 17:
Für $a, b \in \mathbb{N}$ seien $q, r \in \mathbb{N}_0$ so, daß $b = aq + r$ und $0 \leq r < a$. Weiters $q' := \lfloor \frac{b}{a} \rfloor$ und $r' := b - q'a$. Gilt $q = q'$ und $r = r'$?

Frage 18:
Seien $a \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{Z}$. Warum sind dann der Quotient und der Rest (bei Division von b durch a) eindeutig bestimmt?

Frage 19:
Beweisen Sie: $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} \quad (a \mid b \wedge a \mid c) \Rightarrow [\forall s, t \in \mathbb{Z} \quad a \mid (bs + ct)]$.

Frage 20:
Was bedeutet es für eine Zahl a, ein Primfaktor einer Zahl $b \in \mathbb{N}$ zu sein?

Frage 21:
Was bedeutet es für eine Zahl a, ein Primfaktor der Vielfachheit k einer Zahl $b \in \mathbb{N}$ zu sein?

Frage 22:
Was besagt der Fundamentalsatz der Arithmetik?

Frage 23:
Was bedeutet es, dass zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ kongruent modulo m für einen Modul $m \in \mathbb{N}$ sind?

Frage 24:
Wir wissen, dass Quadratwurzelziehen keine Äquivalenztransformation ist. Was bedeutet dies konkret, wenn wir beim Lösen einer Ungleichung $a \leq b$ bei beiden Seiten die Quadratwurzel ziehen möchten? (Also $\sqrt{a}$ und $\sqrt{b}$ betrachten möchten.) Besteht diesbezüglich ein Unterschied zwischen dem Ziehen (auf beiden Seiten) einer Quadratwurzel und einer kubischen Wurzel? (Also zwischen $\sqrt{a}$ und $\sqrt{b}$ im Vergleich zu $\sqrt[3]{a}$ und $\sqrt[3]{b}$.)

Frage 25:
Was versteht man unter $\mathbb{Z}_m$?

Frage 26:
Sie möchten ein Polynom p für ein Argument $x \in \mathbb{Z}_m$ über $\mathbb{Z}_m$ auswerten, für ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2$. Natürlich gehören alle Koeffizienten von $\mathbf{p}$ zu $\mathbb{Z}_m$; also $p(x) := \sum_{i=0}^{k} a_k x^k$ mit $a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}_m$. Können Sie diese Auswertung normal über $\mathbb{Z}$ vornehmen und erst das Resultat modulo m nehmen, oder müssen Sie bei allen arithmetischen Operationen die speziellen Gesetze der Modulo-Arithmetik beachten? Warum?

Frage 27:
Welche Bedingungen müssen gelten, damit zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ relativ prim sind?

Frage 28:
Gemäß der Identität von Bézout gibt es für alle $a, b \in \mathbb{N}$ stets $x, y \in \mathbb{Z}$ so, daß $\gcd(a, b) = ax + by$. Beweisen Sie diese Aussage für alle $a, b \in \mathbb{N}$ unter der Annahme, daß sie für alle $a', b' \in \mathbb{N}$ mit $\gcd(a', b') = 1$ gilt.

Frage 29:

Beweisen Sie für $a,b,r \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{Z}$, daß $\gcd(a,b) = \gcd(b,r)$ falls $a = bq + r$.

Frage 30:
Wie kann man durch Lösen einer diophantischen Gleichung überprüfen, ob zwei Zahlen $a,b \in \mathbb{N}$ relativ prim sind?

Frage 31:
Angenommen, die Gleichung $1 = ax + by$ hat für zwei gegebene Zahlen $a,b \in \mathbb{N}$ eine Lösung $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$. Ist diese Lösung dann notwendigerweise eindeutig über $\mathbb{Z}^2$?

Frage 32:
Für welche $n,m \in \mathbb{N}$ enhält $K_{m,n}$ einen Hamiltonschen Kreis?

Frage 33:
Berechnen Sie $\gcd(78, 99)$ mittels des Euklidischen Algorithmus.

Frage 34:
Bildet $(\mathbb{Z}_\mathbf{m}, +_\mathbf{m}, \cdot_\mathbf{m})$ für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2$ immer einen Körper? Warum (nicht)?

Frage 35:
Wie kann man einfach (und mathematisch sauber) argumentieren, dass eine jede echte Teilmenge einer abzählbar unendlichen Menge stets endlich oder ebenfalls abzahlbär unendlich ist.

Frage 36:
Berechnen Sie mittels des erweiterten Euklidischen Algorithmus eine diophantische Lösung für $99x + 78y = 3$.

Frage 37:
Warum gilt $(a \cdot b) \bmod m = (a \bmod m) \cdot (b \bmod m) \bmod m$ für alle $a,b \in \mathbb{N}$ und alle $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$?

Frage 38:
Was besagt der Chinesische Restsatz?

Frage 39:
In der VO haben wir diskutiert, dass die Zahl 1 zwar auch nur durch 1 und sich selbst teilbar ist, trotzdem aber keine Primzahl ist. Welche Aussage aus der VO wäre nicht mehr gültig (bzw. müßte umformuliert werden), falls man 1 als Primzahl ansehen möchte? (Ein Beispiel mit entsprechender Begründung reicht als Antwort.)

Frage 40:
Wie kann man für relativ prime Zahlen $m_1, m_2, \cdots, m_k \in \mathbb{N}$ eine Zahl $b \in \mathbb{Z}$ finden, die für gegebene $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$\begin{aligned} b &\equiv_{m_1} a_1 \\ b &\equiv_{m_2} a_2 \\ &\vdots \\ b &\equiv_{m_k} a_k \\ 0 \leq b &\leq -1 + \textstyle\prod_{i=1}^k m_i \end{aligned}$$

Frage 41:
Wird $13 \cdot (13^{16} - 1)$ durch 17 ohne Rest geteilt? Warum (nicht)?

Frage 42:
Wie kann man den Körper der rationalen Zahlen formal einführen?

Frage 43:

Existiert auf $\mathbb{Q}$ eine Wohlordnung? Falls nein, warum nicht? Falls ja, wie kann man auf $\mathbb{Q}$ eine Wohlordnung konstruieren?

Frage 44:
Existiert auf $\mathbb{Z}$ eine Wohlordnung? Falls nein, warum nicht? Falls ja, wie kann man auf $\mathbb{Z}$ eine Wohlordnung konstruieren?

Frage 45:
Muß eine jede Wohlordnung eine totale Ordnung sein?

Frage 46:
Wir betrachten eine halbgeordnete Menge $(S, \succeq)$ und verlangen, daß jede nicht leere Teilmenge von S ein kleinstes Element hat. Muß S dann durch $\succeq$ sogar total geordnet sein? Warum (nicht)?

Frage 47:
Muß eine jede wohlfundierte Ordnung eine totale Ordnung sein?

Frage 48:
Ist jede totale Ordnung auch eine Wohlordnung?

Frage 49:
Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Begriffen “Minimum” und “Infimum”?

Frage 50:
Wie sehen Sie die folgende Definition für ein Prädikat über $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$?

$$P(n,m) :\Leftrightarrow \begin{cases} \top & \text{falls } n = m = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1, m\} \quad n \nmid m & \text{falls } n > 1 \text{ oder } m > 1. \end{cases}$$

Frage 51:
Seien $m, n, k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq m \leq k$ und $1 \leq n \leq k$. Formulieren Sie eine formal saubere Definition von $\sum_{i=m}^{n} a_i$ für k reelle Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$.

Frage 52:
Konvertieren Sie 281 in eine Darstellung zur Basis 3. (Natürlich reicht das Endergebnis allein nicht, sondern es sind alle für eine händische Rechung nötigen Rechenschritte anzugeben!)

Frage 53:
Seien $m, n, k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq m \leq k$ und $1 \leq n \leq k$. Formulieren Sie eine formal saubere Definition von $\prod_{i=m}^{n} a_i$ für k reelle Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$.

Frage 54:
Für welche Paare $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ ist das nachstehend definierte Prädikat P wahr?

$$P(n,m) :\Leftrightarrow \begin{cases} \top & \text{falls } n = m = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1, m\} \quad n \nmid m & \text{falls } n > 1 \text{ oder } m > 1. \end{cases}$$

Frage 55:
Person A formuliert eine Definition, um reellen Zahlen eine Eigenschaft X zuzuweisen. Person B vermutet, daß es genau eine Zahl aus $\mathbb{R}$ gibt, die die Eigenschaft X aufweist. Was wäre zum Beweis dieser Vermutung zu zeigen?

Frage 56:
Formulieren Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung, dass eine reelle Zahl eine eindeutige Dezimaldarstellung hat.

Frage 57:

Das Hasse-Diagramm wird üblicherweise als Graph so in die Ebene eingebettet, dass die Kanten (als Geradensegmente) gemäß einer klar vorgegebenen Art gezeichnet werden. Warum ist dies wichtig?

Frage 58:
Jemand formuliert ein Prädikat P über $\mathbb{N}$ und fragt, ob sich zumindest eine natürliche Zahl finden läßt, sodaß P wahr ist. Nach einigem Nachdenken entwickeln Sie einen Algorithmus, mit dessen Hilfe Sie eine geeignete Zahl bestimmen können. Was für einen Beweis aus der Sicht der Beweistheorie haben Sie damit erbracht?

Frage 59:
Was bedeutet die Terminologie „O.B.d.A.“? In welcher Situation darf sie eingesetzt werden?

Frage 60:
Nennen Sie zumindest vier natürlichsprachliche Synonyme (in Dt.) für $A \Rightarrow B$.

Frage 61:
Nennen Sie zumindest drei natürlichsprachliche Synonyme (in Dt.) für $A \Leftrightarrow B$.

Frage 62:
In der VO haben wir diskutiert, wie man auf $\mathbb{Z}$ eine Wohlordnung festlegen kann. Wie geht dies? Erklären Sie dies detailliert.

Frage 63:
Bedeutet "proof by exhaustion", daß Sie den Beweis physisch und/oder psychisch erschöpft abbrechen? Falls nein: Was bedeutet dies sonst?

Frage 64:
Was versteht man unter einer Fallunterscheidung in einem Beweis von $H \Rightarrow C$? Was ist dabei zu beachten?

Frage 65:
Was versteht man unter einem Umkehrschluss? Wie kann man damit etwa einen Existenzbeweis führen?

Frage 66:
Wir benutzen einen Umkehrschluss, um einen Existenzbeweis zu führen. Handelt es sich dann um einen konstruktiven Beweis? Warum (nicht)?

Frage 67:
Wie geht man bei einem Widerspruchsbeweis von $H \Rightarrow C$ vor?

Frage 68:
Wie geht man bei einem indirekten Beweis von $H \Rightarrow C$ vor?

Frage 69:
Zum Beweis von $H \Rightarrow C$ nehmen wir eine leicht überprüfbare wahre Aussage R, wie etwa $0 \neq 1$, und leiten aus $(H \wedge \neg C)$ damit $\neg R$ her. Haben wir damit einen Beweis von $H \Rightarrow C$ geschafft? Warum (nicht)?

Frage 70:
Jemand behauptet, dass für jedes Paar $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ die Diophantische Gleichung $a \cdot x + b \cdot y = 1$ (mit Variablen x,y) stets entweder gar keine oder abzählbar unendlich viele Lösungen hat. Warum stimmt dies (nicht)?

Frage 71:
Was versteht man unter einem Gegenbeispiel? Illustrieren Sie diesen Beweisansatz an einem Beispiel Ihrer Wahl.

Frage 72:

Angenommen, wir glauben, daß $(\exists x\ A)$ nicht wahr ist. Kann man dies durch Angabe eines Gegenbeispiels beweisen?

Frage 73:
Begründen Sie, warum eine strikte Halbordnung genau dann wohlfundiert ist, wenn keine unendlichen absteigenden Ketten existieren.

Frage 74:
Wir betrachten eine Menge M mit einer strikten Halbordnung $\prec$. Welche Eigenschaft muß definitionsgemäß gelten, damit $\prec$ wohlfundiert ist?

Frage 75:
Was ist an folgendem Induktionsbeweis der Aussage

> „Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: Alle Punkte einer beliebigen Menge von n Punkten der Ebene liegen stets auf einer Gerade!“

falsch?
IB: Die Aussage gilt offenbar für $n = 1$ und $n = 2$.
IH: Die Aussage gelte für ein beliebig aber fixes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.
IS: Wir betrachten $n+1$ beliebig aber fixe Punkte $p_1, p_2, \ldots, p_n, p_{n+1}$ der Ebene. Gemäß IH liegen die Punkte $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n$ auf einer Gerade, welche wir g nennen. Ebenfalls gemäß IH liegen die Punkte $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_{n+1}$ auf einer Gerade, welche wir h nennen. Da g und h beide durch p_1 und p_2 gehen, sind diese beiden Geraden ident und die Punkte $p_1, p_2, \ldots, p_n, p_{n+1}$ liegen daher auf einer Gerade.

Frage 76:
Erklären Sie das Prinzip der wohlfundierten Induktion.

Frage 77:
Warum ist auf $(M, \prec)$ das Prinzip der wohlfundierten Induktion nicht anwendbar, wenn die strikte Halbordnung $\prec$ nicht wohlfundiert ist?

Frage 78:
Sei (S, R) eine halbgeordnete Menge. Das Hasse-Diagramm von (S, R) wird üblicherweise so gezeichnet, dass alle orientierten Kanten nach oben zeigen. Warum ist eine derartige Anordnung der Elemente von S als Punkte in der Ebene stets möglich?

Frage 79:
Bei der Induktion haben wir explizit den Beweis eines Basisfalls verlangt: wenn ein Prädikat P für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten soll, ist beim Induktionsbeweis der Fall $n = 1$ explizit zu behandeln. Bei der wohlfundierten Induktion haben wir hingegen nicht explizit den Beweis eines Basisfalls verlangt. Warum ist der Basisfall bei der wohlfundierten Induktion trotzdem abdeckt? Kann es mehrere Basisfälle geben?

Frage 80:
Was besagt das Schubfachschluss-Prinzip?

Frage 81:
Zeigen Sie, daß $\sqrt{5}$ keine rationale Zahl ist.

Frage 82:
Bei einem Gesellschaftsspiel wählt Person X drei verschiedene Zahlen a_1, a_2, a_3 aus $\mathbb{N}$ aus. Sei $A := \{a_1, a_2, a_3\}$. Die Aufgabe von Person Y ist nun, aus A eine oder zwei oder drei Zahlen (ohne Zurücklegen) auszuwählen, sodaß deren Summe durch 3 teilbar ist. Ist dies immer möglich?

Frage 83:
Was besagt das Siebprinzip für die n endlichen Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$? (Sie können sich bei der Antwort auf $n = 2$ und $n = 3$ beschränken.)

Frage 84:

Was versteht man unter einer Indikatorfunktion?

Frage 85:
Sei A eine endliche Menge sowie $B \subseteq A$. Was gibt $\sum_{a \in A} 1_B(a)$ an?

Frage 86:
Definieren Sie den Binomialkoeffizient.

Frage 87:
Wie kann ein Binomialkoeffizient rasch durch Addition zweier anderer Binomialkoeffizienten berechnet werden?

Frage 88:
Gilt $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$? Warum (nicht)?

Frage 89:
Gilt $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$? Warum (nicht)?

Frage 90:
Was versteht man unter einer Permutation von n Zahlen?

Frage 91:
Wie viele verschiedene Permutationen von n Buchstaben gibt es?

Frage 92:
Für $n, k \in \mathbb{N}$ betrachten wir n natürliche Zahlen sowie eine Zahl k mit $1 \leq k \leq n$. Was versteht man unter einem Zyklus der Länge k?

Frage 93:
Hat jede Permutation von n Zahlen zumindest einen Zyklus?

Frage 94:
Beweisen oder widerlegen Sie: Die Zusammensetzung von zwei Permutationen ist kommutativ.

Frage 95:
Ist ein Baum stets ein planarer Graph? Warum (nicht)?

Frage 96:
Warum garantiert die Forderung in der Definition von $\mathbb{N}$, dass jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$ ein Minimum enthält, dass jede natürliche Zahl von der Form $(\ldots(((1+1)+1)+1)+\ldots+1)$ ist? (Also ein Nachfolger eines Nachfolgers (eines Nachfolgers ...) von 1 ist.)

Frage 97:
Bei einer Party sind die Gäste von der tollen Schallplattensammlung der Gastgeberin beeindruckt. Sie nehmen wiederholt zwei einzelne Platten aus der Sammlung und stecken sie dann wieder hinein. Die Gastgeberin beobachtet dieses Treiben mit Sorge, weil sie feststellt, daß jeweils bei jedem Herausnehmen/Hineinstecken die Position von zwei Platten vertauscht wird. Wie kann man dieses Vertauschen mathematisch charakterisieren? Warum ist dies wirklich ein Anlass zur Sorge für die Gastgeberin?

Frage 98:
Sei $n \in \mathbb{N}$. Was versteht man unter der zyklischen Gruppe S_n?

Frage 99:

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wie viele Elemente enthält S_n?

Frage 100:
Was versteht man unter einer Variation ohne Zurücklegen? Wieviele verschiedene derartige Variationen sind bei einer n-elementigen Grundmenge insgesamt möglich?

Frage 101:
Was versteht man unter einer Variation mit Zurücklegen?

Frage 102:
Wie kann man die Mächtigkeit der Potenzmenge einer n-elementigen Menge in Abhängigkeit von n angeben? Überprüfen Sie Ihre Antwort für $n = 3$.

Frage 103:
Was versteht man unter einer Kombination ohne Zurücklegen? Wieviele verschiedene derartige Kombinationen (mit verschiedenen Elementzahlen) sind bei einer n-elementigen Grundmenge insgesamt möglich?

Frage 104:
Wir interessieren uns für die Anzahl an Rechenschritten, die ein Algorithmus zum Verschlüsseln eines n-stelligen Passwortes über dem endlichen Alphabet Σ braucht. Wie kann man die durchschnittliche Anzahl an dafür benötigten Rechenschritten in Abhängigkeit von n sauber definieren?

Frage 105:
Wie ist der Ausdruck $O(n \cdot \sqrt{n} \cdot \log(\log n)) = O(n^2)$ zu interpretieren? Was bedeutet er (nicht)? Ist er bei der einzig möglichen Interpretation korrekt? Warum (nicht)?

Frage 106:
Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$. Definieren Sie $O(f)$.

Frage 107:
Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$. Definieren Sie $\Omega(f)$.

Frage 108:
Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$. Definieren Sie $\Theta(f)$.

Frage 109:
Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$. Definieren Sie $o(f)$.

Frage 110:
Ist der Ausdruck $O(n) = O(n \log n)$ korrekt? Wie ist dies zu interpretieren?

Frage 111:
Was versteht man unter einer linearen homogenen Rekurrenz?

Frage 112:
Wie kann man einfach prüfen, ob eine Rekurrenz homogen ist?

Frage 113:
Was besagt das "Smoothness Theorem" und wie kann man es anwenden?

Frage 114:
Was versteht man unter „Kaskadieren“ bei Rekurrenzgleichungen? Lösen Sie damit die Rekurrenzgleichung $t_n = t_{n-1} + n$, wobei

$t_0 := 0$.

Frage 115:
Was versteht man unter „Iterieren“ bei Rekurrenzgleichungen? Lösen Sie damit die Rekurrenzgleichung $t_n = t_{n-1} + n$, wobei $t_0 := 0$.

Frage 116:
Was versteht man unter „konstruktiver Induktion“?

Frage 117:
Beim Beweis einer Allaussage über eine Variable x aus einem Universum U, etwa $\forall x \in U\ P$, greift man gerne zur mathematischen Formulierung “sei $x_0 \in U$ beliebig aber fix“. Warum ist es aus mathematischer Sicht dabei essentiell, dass das Symbol x_0 nirgends sonst im Beweis bereits vorkam?

Frage 118:
Wir haben in der VO die ganzen Zahlen als Äquivalenzklassen von natürlichen Zahlen eingeführt und dann die „übliche“ Arithmetik auf diesen Äquivalenzklassen definiert. Dabei haben wir allerdings eine wichtige Eigenschaft nicht bewiesen. Was wäre zu beweisen gewesen?

Frage 119:
Wie kann man eine lineare homogene Rekurrenz mit konstanten Koeffizienten lösen? Skizzieren Sie das Vorgehen an der Rekurrenz $x_n = 3x_{n-1}$, wobei $x_0 := \frac{1}{3}$.

Frage 120:
Was besagt das “Master Theorem” der Rekurrenzgleichungen?

Frage 121:
Was ist ein schlichter endlicher ungerichteter Graph?

Frage 122:
Was ist ein schlichter endlicher gerichteter Graph?

Frage 123:
Was muß für die Knotenzahl n eines Graph $\mathcal{G}$ jedenfalls gelten, wenn jeder Knoten von $\mathcal{G}$ den Grad 37 hat.

Frage 124:
Geben Sie jeweils ein Beispiel für ein explizite und eine rekursive Definition einer Folge $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ an. Bitte achten Sie darauf, dass bei beiden Definitionsarten die gleiche Folge spezifiziert wird.

Frage 125:
Welche der folgenden Antworten ist richtig? In einem Graph

- ist die Summe der Knotengrade stets gerade,
- ist die Summe der Knotengrade stets ungerade,
- kann die Summe der Knotengrade sowohl gerade wie auch ungerade sein.

Frage 126:
Sei $\mathcal{G} = (V,E)$ ein gerichteter Graph. Jemand behauptet, daß $\forall v \in V \quad \deg^-(v) > \deg^+(v)$. Ist dies möglich?

Frage 127:
Sei $\mathcal{G} = (V,E)$ ein gerichteter Graph. Jemand behauptet, daß $\forall v \in V \quad \deg^-(v) < \deg^+(v)$. Ist dies möglich?

Frage 128:

Sei $\mathcal{G} = (V,E)$ ein gerichteter Graph, mit $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Wir wissen, daß $\deg^+(v_1) = 2$, $\deg^+(v_2) = 3$, $\deg^+(v_3) = 4$, $\deg^+(v_4) = 0$, $\deg^+(v_5) = 1$. Was folgt daraus für die Kantenmenge E?

Frage 129:
Sei $\mathcal{G} = (V,E)$ ein gerichteter Graph, mit $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Jemand behauptet, daß

$$\deg^-(v_1) = 2,\ \deg^-(v_2) = 3,\ \deg^-(v_3) = 5,\ \deg^-(v_4) = 1,\ \deg^-(v_5) = 1.$$

Ist dies möglich? Warum (nicht)?

Frage 130:
Wir bezeichnen für $n \in \mathbb{N}_0$ mit F_n die n-te Fibonacci Zahl. Argumentieren Sie, dass $F_n \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq 5$. .

Frage 131:
Sei $\mathcal{G}$ ein Graph und $\mathcal{K}$ ein Hamiltonscher Kreis in $\mathcal{G}$. Ist $\mathcal{K}$ dann auch notwendigerweise eine Eulersche Tour in $\mathcal{G}$? Warum (nicht)?

Frage 132:
Sei $\mathcal{G}$ ein Graph und $\mathcal{T}$ eine Eulersche Tour in $\mathcal{G}$. Ist $\mathcal{T}$ dann auch notwendigerweise ein Hamiltonscher Kreis in $\mathcal{G}$? Warum (nicht)?

Frage 133:
Sei $\mathcal{G}$ ein Graph. Ist jeder Zyklus in $\mathcal{G}$ automatisch auch eine Tour in $\mathcal{G}$? Warum (nicht)?

Frage 134:
Was ist die allgemeinste Art von Graph mit n Knoten, sodaß man Knoten um Knoten insgesamt $n-1$ Knoten (samt den inzidenten Kanten) in zufälliger Reihenfolge entfernen kann, ohne jemals die Anzahl der Zusammenhangskomponenten zu erhöhen?

Frage 135:
Kann ein Graph mit 572 Knoten und 570 Kanten zusammenhängend sein? Warum (nicht)?

Frage 136:
Auf Graphen erstellen wir eine Ordnung durch lexikographischen Vergleich der Knoten- und Kantenzahlen: für $\mathcal{G}_1 = (V_1, E_1)$ und $\mathcal{G}_2 = (V_2, E_2)$ haben wir

$$\mathcal{G}_1 \prec \mathcal{G}_2 \quad :\Longleftrightarrow \quad [(|V_1| < |V_2|) \ \vee \ (|V_1| = |V_2| \ \wedge \ |E_1| < |E_2|)].$$

Ist diese Ordnung wohlfundiert?

Frage 137:
Auf Graphen erstellen wir eine Ordnung durch lexikographischen Vergleich der Knoten- und Kantenzahlen: für $\mathcal{G}_1 = (V_1, E_1)$ und $\mathcal{G}_2 = (V_2, E_2)$ haben wir

$$\mathcal{G}_1 \succ \mathcal{G}_2 \quad :\Longleftrightarrow \quad [(|V_1| > |V_2|) \ \vee \ (|V_1| = |V_2| \ \wedge \ |E_1| > |E_2|)].$$

Was ist gemäß dieser Ordnung der kleinste gerichtete Graph, welcher schwach zusammenhängend aber nicht stark zusammenhängend ist?

Frage 138:
Jemand behauptet, dass eine differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Intervall $[0,2]$ ein lokales Extremum oder einen Wendepunkt aufweist. Als Beweis führt diese Person folgendes an:

> Differenzieren von f liefert $f'(x) = x^2 - 4x + 3$ und daher insbesondere $f'(0) = 3$ und $f'(2) = -1$. Aus dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen folge damit sofort die Behauptung.

Um welche Art von Beweis handelt es sich dabei? Geben Sie weiters für diese Behauptung (und mit Benutzung des von der Person angeführten Wissens) einen Beweis dieser Behauptung an, welcher eine grundlegend verschiedene Charakteristik aufweist.

Frage 139:

Muß ein Graph notwendigerweiser zusammenhängend sein, wenn er eine Euler Tour enthält? Warum (nicht)?

Frage 140:
Für ein $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir K_n. Kann man in $O(n^2)$ Zeit entscheiden, ob K_n eine Euler Tour enthält?

Frage 141:
Für ein $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir K_n. Kann man in $O(n^2)$ Zeit entscheiden, ob K_n einen Hamiltonschen Kreis enthält?

Frage 142:
Angenommen, es ist Ihnen gelungen, einen Induktionsbeweis mittels schwacher Induktion zu führen. Könnten Sie ohne viel Nachdenken auch einen Beweis mittels starker Induktion führen? Falls nein: Warum nicht? Falls ja: Warum und wie?

Frage 143:
Enthält ein vollständig-bipartiter Graph mit mindestens drei Knoten immer einen Hamiltonschen Kreis?

Frage 144:
Für welche $n, m \in \mathbb{N}$ enhält $K_{m,n}$ einen Hamiltonschen Kreis?

Frage 145:
Für welche Werte von $n, m \in \mathbb{N}$ enthält $K_{n,m}$ immer eine Euler Tour?

Frage 146:
Für welche Werte von $n, m \in \mathbb{N}$ enthält $K_{n,m}$ immer einen Euler Weg, aber keine Euler Tour?

Frage 147:
Was ist ein Teilbaum eines Wurzelbaums?

Frage 148:
In der VO haben wir diskutiert, wie man auf $\mathbb{Q}$ eine Wohlordnung festlegen kann. Wie geht dies? Erklären Sie dies detailliert.

Frage 149:
Was ist ein Wurzelbaum?

Frage 150:
Was ist ein 2-balanzierter Baum?

Frage 151:
Wann ist ein Binärbaum perfekt balanziert?

Frage 152:
Was ist ein minimal spannender Baum eines gewichteten Graphen?

Frage 153:
Welche drei Bedingungen müssen zumindest gelten, damit zwei Graphen isomorph sein können?

Frage 154:
Formulieren Sie Rekurrenzgleichungen für die Anzahl der Ecken und die Anzahl der Kanten des Hyperwürfels Q_n für $n \in \mathbb{N}_0$.

Frage 155:
Wann sind zwei Graphen isomorph? Was sind notwendige Bedingungen dafür?

Frage 156:

Was ist ein Unterteilungsgraph?

Frage 157:
Was ist eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein Graph planar ist?

Frage 158:
Gibt es unendlich viele Zahlen, welche die Diophantische Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen? (Dabei sollen natürlich a, b, c die Variablen sein.)

Frage 159:
Was besagt das Theorem von Kuratowski?

Frage 160:
Was bedeutet es für die graphische Repräsentierung eines Graphen, wenn bekannt ist, daß er planar ist?

Frage 161:
Was besagt die Eulersche Formel für planare Graphen? Gilt diese Formel auch für Bäume?

Frage 162:
Jemand vermutet, daß es planare Graphen (mit $n \geq 3$ Knoten) gibt, in denen jeder Knotengrad größer oder zumindest gleich sechs ist. Beweisen oder widerlegen Sie diese Vermutung.

Frage 163:
Beweisen oder widerlegen Sie: Gibt es in einem planaren Graphen von jedem Knoten zu jedem anderen Knoten (zumindest) zwei verschiedene Pfade, so hat dieser Graph keinen Schnittknoten.

Frage 164:
Definieren Sie Binomialkoeffizienten rekursiv. Achten Sie auf eine formal-saubere Definition.

Frage 165:
Was ist die chromatische Zahl eines Graph?

Frage 166:
Sei $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Knoten eines Graph. Existiert für jedes $n > 1$ zumindest ein Graph $\mathcal{G}$ so, daß $\chi(\mathcal{G}) = 1$?

Frage 167:
Sei $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Knoten eines Graph. Existiert für jedes $n > 1$ zumindest ein zusammenhängender Graph $\mathcal{G}$ so, daß $\chi(\mathcal{G}) = 2$?

Frage 168:
Gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ stets zumindest einen Graph $\mathcal{G}$ mit n Knoten so, daß $\chi(\mathcal{G}) = n$?

Frage 169:
Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig aber fix mit $n > 1$. Beweisen oder widerlegen Sie: Falls der Graph $\mathcal{G}$ ungleich K_n ist, dann gilt $\chi(\mathcal{G}) < n$.

Frage 170:
Was ist die kleinste Zahl an Farben, die jedenfalls reicht, um jeden planaren Graphen zu färben? Warum?

Frage 171:
Gemäß dem Vierfarbensatz kann jeder Graph mit vier Farben gefärbt werden, sofern er planar ist. Gilt auch die Umkehrung? Ist also jeder Graph zwangsläufig planar, wenn er mit vier Farben gefärbt werden kann? Warum (nicht)?

Frage 172:

Gegeben sei ein Graph $\mathcal{G} = (V,E)$. Wie kann man algorithmisch in $O(|V| + |E|)$ Zeit alle Zusammenhangskomponenten von $\mathcal{G}$ ermitteln?

Frage 173:
Wann ist ein Baum $\mathcal{T}$ ein Unterteilungsgraph des Graphen $\mathcal{G} := (V,E)$, wobei $V := \{u,v\}$ und $E := \{uv\}$?

Frage 174:
Beweisen Sie direkt (ohne Rückgriff auf „schwerere Geschütze“ wie den Vier-Farben-Satz oder den Fünf-Farben-Satz), daß jeder planare Graph mit maximal sechs Farben gefärbt werden kann.

Frage 175:
Um aus einem Irrgarten wieder hinaus zu finden, würden Sie vermutlich nach irgendeinem Schema vorgehen und nicht ziel- und planlos im Irrgarten herumirren. Welche Vorgehensweise ergibt sich in Graphenterminologie, wenn man den Irrgarten auf naheliegende Art als Graph modelliert?

Frage 176:
An der Eingangstür von so mancher Mathematikbibliothek findet man den folgenden durchaus ernst gemeinten Hinweis: „Achtung: Transpositionen erzeugen die zyklische Gruppe!“ Was bedeutet dies?

Frage 177:
Existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ stets ein Graph $\mathcal{G}$ mit n Knoten so, daß $\chi(\mathcal{G}) = m$? Warum (nicht)?

Frage 178:
Bei verschachtelten Definitionen ist es teils gar nicht so einfach, sofort zu erkennen, ob es sich um explizite oder rekursive Definitionen handelt. Da kann es eventuell schon kompliziert werden, Definiens und Definiendum korrekt zu identifizieren. Nach welchem mathematischen Vorgehensschritt kann man Ausschau halten, um dies doch einfach zu erkennen? Was muß bei einer rekursiven Definition immer angegeben werden, was bei einer expliziten Definition fehlt?

Frage 179:
Was bedeutet „wohldefiniert“?

Frage 180:
Zeigen Sie: Wenn man in der total geordneten Menge $(S,\succeq)$ statt $\succeq$ die davon induzierte strikte Ordnung $\succ$ verwendet, dann kann sich das Infimum einer Menge $T \subset S$ ändern. (Wobei das Infimum relativ zu $\succ$ durch Ersetzen von $\succeq$ durch $\succ$ naheliegend definiert ist.)

Frage 181:
Skizzieren Sie einen gerichteten Graphen, welcher schwach zusammenhängend aber nicht stark zusammenhängend ist ist.

Frage 182:
Seien $a,b,m \in \mathbb{N}$ beliebig mit $m \geq 2$. Sei $r_1 \in \mathbb{N}_0$ der Rest von a bei Division durch m, und $r_2 \in \mathbb{N}_0$ der Rest von b bei Division durch m. Gilt stets $r_1 = r_2$ falls $a \equiv_m b$? Warum (nicht)?

Frage 183:
Seien $a,b,c,d,m \in \mathbb{N}$ beliebig mit $m \geq 2$. Gilt stets $a \cdot c \equiv_m b \cdot d$ falls $a \equiv_m b$ und $c \equiv_m d$? Warum (nicht)?

Frage 184:
Wir wissen, dass die sortierten Reihenfolgen der Knotengrade zweier Graphen $\mathcal{G}_1$ und $\mathcal{G}_2$ identisch sein müssen, damit $\mathcal{G}_1 \simeq \mathcal{G}_2$ gilt. Gilt auch die Umkehrung? Warum (nicht)? Bitte begründen Sie Ihre Antwort durch Angabe eines Beweises oder eines Gegenbeispiels!

Frage 185:

Seien $a,b,c,d,m \in \mathbb{N}$ beliebig mit $m \geq 2$. Gilt stets $a-c \equiv_m b-d$ falls $a \equiv_m b$ und $c \equiv_m d$? Warum (nicht)?

Frage 186:
In der Vorlesung wurde für einen Wurzelbaum nicht explizit gefordert, daß er zyklenfrei ist, wenn man ihn als ungerichteten Graphen betrachtet. Gibt es tatsächlich Wurzelbäume, die Zyklen enthalten, wenn man sie als ungerichtete Graphen betrachtet? Warum (nicht)? Achtung: Einfach zu antworten, daß jeder Baum per definitionem zyklenfrei ist, reicht hier nicht!

Frage 187:
Ist die Zahlenfolge, die ein linearer Kongruenzgenerator erzeugt, immer periodisch? Warum (nicht)? Falls ja, wie lange kann die Periode in Abhängigkeit vom Modul m maximal sein?

Frage 188:
Wir betrachten einen Graph $\mathcal{G}$, bei dem jeder Knoten zumindest Grad 2 hat. Enthält $\mathcal{G}$ dann immer einen Zyklus? Warum (nicht)?

Frage 189:
Ist die Anzahl der Flächen einer planaren Einbettung eines planaren Graphen stets unabhängig von der konkret gewählten Einbettung? Warum (nicht)?

Frage 190:
Beweisen Sie, daß ein jeder Baum ein planarer Graph ist.

Frage 191:
Beweisen oder widerlegen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gibt es einen Graph mit n Knoten, bei dem alle Knotengrade verschieden sind.

Frage 192:
Ist ein jeder Baum ein planarer Graph? Argumentieren Sie Ihre Antwort. (Ja oder Nein reicht natürlich nicht!)

Frage 193:
Ist ein Baum mit mindestens zwei Knoten stets ein bipartiter Graph? Warum (nicht)?

Frage 194:
Ist ein zusammenhängender bipartiter Graph stets ein Baum? Warum (nicht)?

Frage 195:
Wir wissen, daß ein jeder planare Graph vierfärbbar ist. Gilt auch die Umkehrung: Ist ein jeder vierfärbbare Graph auch stets planar? Warum (nicht)?

Frage 196:
Argumentieren Sie, warum ein Graph genau dann bipartit ist, wenn seine chromatische Zahl gleich zwei ist.

Frage 197:
Was bedeutet es für einen Graph, dreiecksfrei zu sein?

Frage 198:
Wir wissen, daß $v-e+f=2$ für planare Graphen gilt. Warum hat dann ein jeder dreiecksfreie planare Graph zumindest einen Knoten vom Grad höchstens drei?

Frage 199:
Wir wissen, daß ein dreiecksfreier planarer Graph $\mathcal{G}$ zumindest einen Knoten vom Grad höchstens drei hat. Warum gilt dann $\chi(\mathcal{G}) \leq 4$? Argumebtieren Sie dies ohne Benutzung des Vierfarbensatzes.

Frage 200:

Wir wissen, daß $v-e+f=2$ für planare Graphen gilt. Warum gilt dann $e \leq 2v-4$ für alle dreiecksfreien planaren Graph mit $v \geq 2$?

Frage 201:
Wie viele Kanten und Seitenflächen hat ein Polyeder mit 10 Ecken höchstens?

Frage 202:
Sei $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \leq 25$ beliebig aber fix. Warum gilt

$$\left[\big((n+13) \bmod 26\big)+13\right] \bmod 26 = n?$$

Frage 203:
In der VO hatten wir folgende Charakterisierung eines Graphen $\mathcal{G}$, bei dem jeder Knoten mindestens Grad 1 hat: „Der Graph $\mathcal{G}$ besitzt eine Eulersche Tour genau dann wenn er zusammenhängend ist und wenn alle Knoten von $\mathcal{G}$ einen geraden Knotengrad hat.“ Warum ist dabei die Forderung essentiell, dass jeder Knoten von $\mathcal{G}$ mindestens Grad 1 hat?

Frage 204:
Ermitteln Sie mit dem in der VO vorgestellten Algorithmus (x,y) als ein Lösungspaar der Diophantischen Gleichung $44x+92y=4$. (Es sind alle Rechenschritte gemäß VO anzugeben; Raten reicht natürlich nicht!)

Frage 205:
In der VO hatten wir folgende Charakterisierung eines Graphen $\mathcal{G}$, bei dem jeder Knoten mindestens Grad 1 hat: „Der Graph $\mathcal{G}$ besitzt einen Eulerschen Weg (aber keine Eulersche Tour) genau dann wenn er zusammenhängend ist und wenn exakt zwei Knoten von $\mathcal{G}$ einen ungeraden Knotengrad hat.“ Warum ist dabei die Forderung essentiell, dass jeder Knoten von $\mathcal{G}$ mindestens Grad 1 hat?

Frage 206:
In der VO haben wir die Theoreme von Dirac und Ore besprochen. Welches Theorem ist dabei die Verallgemeinerung des anderen? Warum?

Frage 207:
Zeichnen Sie einen zusammenhängenden Graph, welcher einen Hamiltonschen Kreis hat, sodass zwar das Theorem von Ore erfüllt ist, nicht aber das Theorem von Dirac.

Frage 208:
Zeichnen Sie einen zusammenhängenden Graph, welcher einen Hamiltonschen Kreis hat, aber weder das Theorem von Ore noch das Theorem von Dirac erfüllt.

Frage 209:
Was ist die allgemeinste Bedingung an einen zusammenhängenden Graphen, sodass er genau einen spannenden Baum enthält.

Frage 210:
Wir bezeichnen als Gradvektor eines Graphen die aufsteigend sortierte Reihenfolge der Grade all seiner Knoten. Angenommen, zwei Graphen haben identische Gradvektoren. Müssen sie dann auch isomorph sein? Warum (nicht)?

Frage 211:
Beim Suchen einer Lösung für ein graphentheoretisches PS-Beispiel stossen Sie auf drei graphenartige Strukturen $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$, $\mathcal{G}_3$ (mit je zwölf Knoten), deren Knotengrade nachstehend angegeben sind. Angeblich handelt es sich bei diesen Strukturen jeweils um planare Graphen. Ist dies jeweils möglich?

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}
Knotengrade von $\mathcal{G}_1$	6	6	6	6	7	7	7	7	8	8	8	8
Knotengrade von $\mathcal{G}_2$	6	6	8	6	0	7	2	2	4	4	2	6
Knotengrade von $\mathcal{G}_3$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11