54. Ein Würfel habe R rote und $6-R$ blaue Seiten. Da wir nicht wissen, wie groß R ist, betrachten wir R als gleichverteilte Zufallsvariable, d.h. $P(R=r)=\frac{1}{7}$ für $0 \le r \le 6$. Um Rückschlüsse auf R zu ziehen, ermitteln wir eine Stichprobe: wir würfeln drei mal und erhalten drei mal *rot*. Anders ausgedrückt: X sei die Zufallsvariable, die angibt, wie viele von drei Würfen *rot* ergeben, und wir erhalten $X=3$. Was können wir nun über das „wahre R“ sagen?
    (a) Berechne die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(X=3|R=r)$ für $r=0\ldots 6$.
    (b) Berechne die totale Wahrscheinlichkeit $P(X=3)$.
    (c) R' sei die Zufallsvariable, die (wie R) die Anzahl der roten Seiten des Würfels angibt, allerdings unter der Bedingung, dass die Stichprobe $X=3$ ergeben hat. Gib die diskrete Dichte von R' an und skizzieren Sie diese.
    Hinweis: $P(R'=r)=P(R=r|X=3)$ $\quad\rightarrow$ Bayes.
    (d) Wir wollen die Behauptung „Der Würfel hat mit einer Wahrscheinlichkeit von über 90% mindestens r rote Seiten“ aufstellen. Ermittle ein größtmögliches r und belege die Behauptung.

55. Ein kurzsichtiger Gewehrschütze trifft mit einer Standardabweichung von 50cm (horizontal) neben das Ziel. Die Schüsse verteilen sich (horizontal) nach einer Normalverteilung. Er gibt fünf Schüsse an folgende (horizontale) Positionen ab:

    $$140, 160, 200, 240, 260$$

    Wohin hat er gezielt? Berechne das „wahrscheinlichste“ Ziel sowie ein 75% Konfidenzintervall für das Ziel.

56. Wie Beispiel 55. Die Verteilung sei jedoch unbekannt. Verwende daher die Ungleichung von Tschebyschew $P(|X-\mathrm{E}(X)| \ge a) \le \frac{\mathrm{V}(X)}{a^2}$. Tipp: Setze $\bar{x}$ statt X in die Ungleichung ein.

57. Eine Stichprobe der Größe 30 einer normalverteilten Zufallsvariable $X \sim N_{\mu,\sigma^2}$ ergibt den Mittelwert $\bar{x}=35.4$ und eine Standardabweichung von $s=2.3$. Berechne Konfidenzintervalle für μ und σ zum Konfidenzniveau 0.95.

58. Bei einer Umfrage unter 100 Befragten haben 15 angegeben, Vegetarier zu sein. In welchem Bereich liegt der Anteil der Vegetarier in der Bevölkerung mit einer Sicherheit von 95%?

59. Du spielst Galileo Galilei und überprüfst die Erdgravitation, indem du Steine vom schiefen Turm von Pisa wirfst. Mit einer Höhe von 55.86 m und einer Beschleunigung von 9.81 $\mathrm{m/s^2}$ müsste ein Stein 3.375 s für den Fall brauchen (Hypothese H_0). Du misst die Zeit sechs mal und erhältst

    $$3.51, 3.36, 3.43, 3.49, 3.35, 3.53\,.$$

    Nimm an, die Werte seien normalverteilt. Ist die Gravitationshypothese mit einem Signifikanzniveau von 10% beizubehalten oder zu verwerfen? (Oder solltest du größere Steine mit weniger Luftwiderstand verwenden?)