46. Ein Nachrichtenquelle X, die geometrisch verteilt ist mit $p = \frac{1}{4}$, wird codiert mit dem Code

$$c(k) = \begin{cases} 1^{(k-1)/2}00 & k \text{ ungerade} \\ 1^{(k-2)/2}01 & k \text{ gerade}, \end{cases}$$

also $1 \mapsto 00$, $2 \mapsto 01$, $3 \mapsto 100$, $4 \mapsto 101$, $5 \mapsto 1100, \ldots$ L sei die Codelänge dieses Codes. Zeige, dass $P(L-1 = l) = P(X = 2l-1 \vee X = 2l)$ ist, und daraus, dass $L-1$ ebenfalls geometrisch verteilt ist. Berechne daraus die mittlere Codelänge $\mathrm{E}(L)$.

47. Zwei unabhängige Zufallsvariablen X_1 und X_2 seien exponentialverteilt mit verschiedenen Parametern λ_1 und λ_2. Zu berechnen ist allgemein die Wahrscheinlichkeit $P(X_1 < X_2)$. *Hinweis:* Betrachte die gemeinsame Dichte $f(x_1, x_2) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2)$.

48. X habe die Dichtefunktion $f_X(x) = 2x$ für $0 \le x \le 1$. Y habe die gleiche Verteilung und ist unabhängig von X. Berechne und skizziere die Dichtefunktion von $X + Y$. *Hinweis:* Unterscheide die Fälle $x \le 1$ und $x \ge 1$, und beachte, dass der Integrationsbereich der Durchschnitt jener Intervalle ist, auf denen die Dichtefunktionen $\neq 0$ sind.

49. Ermittle die charakteristische Funktion der Binomialverteilung. Benutze dafür die Tatsache, dass diese die Summe von n Bernoulli-Versuchen ist. Ermittle außerdem die charakteristische Funktion der Poisson-Verteilung und zeige damit die Konvergenz der Binomialverteilung gegen die Poisson-Verteilung (unter Verwendung der Folge $(1 + \frac{a}{n})^n \xrightarrow{n \to \infty} \mathrm{e}^a$).