46. Eine Messgröße Z setzt sich aus zwei Teilgrößen auf folgende Art zusammen: $Z = X + Y$. X ist (stetig) gleichverteilt auf dem Intervall $[0, a]$. Y ist gleichverteilt auf $[0, b]$. Eine Stichprobe von Z ergibt

$$z = \{2.5, 2.0, 2.5, 5.5, 4.0, 2.5, 2.0\}.$$

Ermittle Schätzungen für a und b nach der Momentenmethode.

47. Die Anzahl X der Bitfehler auf einem Datenkanal pro Sekunde ist Poisson-verteilt mit Parameter λ. Berechne einen Maximum-Likelihood-Schätzer für λ zu folgender Stichprobe von fünf aufeinander folgenden Sekunden.

$$32, 56, 61, 46, 55$$

48. Eine stetige Zufallsvariable habe die Dichtefunktion $f(x) = 3\lambda x^2 e^{-\lambda x^3}$. Berechne den Maximum-Likelihood-Schätzer für λ zur Stichprobe

$$0.6, 0.9, 1.1, 1.6, 2.5.$$

49. Überprüfe, ob der empirische Median für Stichprobengröße 3 und eine Verteilung mit der Dichtefunktion $f(x) = 2x$ im Bereich $0 \le x \le 1$ erwartungstreu ist. Berechne dafür zuerst die Verteilungsfunktion $F(x) = P(X \le x)$. Der echte Median ist dann jenes x mit $P(X \le x) = \frac{1}{2}$. Die Stichprobe $\{x_1, x_2, x_3\}$ wird modelliert durch drei unabhängige Zufallsvariablen $\{X_1, X_2, X_3\}$ mit der selben Dichtefunktion. Die Verteilungsfunktion $F_{\tilde{X}}(x)$ bekommt man dann über

$$P(\tilde{X} \le x) = P((X_1 \le x \wedge X_2 \le x \wedge X_3 \le x) \vee (X_1 \le x \wedge X_2 \le x \wedge X_3 > x) \vee \ldots),$$

also der Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei der X_i kleiner-gleich x sind. Damit kann man dann $\mathrm{E}(\tilde{X})$ berechnen.

50. Ein Würfel habe R rote und $6 - R$ blaue Seiten. Da wir nicht wissen, wie groß R ist, betrachten wir R als gleichverteilte Zufallsvariable, d.h. $P(R = r) = \frac{1}{7}$ für $0 \le r \le 6$. Um Rückschlüsse auf R zu ziehen, ermitteln wir eine Stichprobe: wir würfeln drei mal und erhalten drei mal *rot*. Anders ausgedrückt: X sei die Zufallsvariable, die angibt, wie viele von drei Würfen *rot* ergeben, und wir erhalten $X = 3$. Was können wir nun über das „wahre R“ sagen?

    (a) Berechne die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(X = 3|R = r)$ für $r = 0 \ldots 6$.

    (b) Berechne die totale Wahrscheinlichkeit $P(X = 3)$.

    (c) R' sei die Zufallsvariable, die (wie R) die Anzahl der roten Seiten des Würfels angibt, allerdings unter der Bedingung, dass die Stichprobe $X = 3$ ergeben hat. Gib die diskrete Dichte von R' an und skizzieren Sie diese.
    Hinweis: $P(R' = r) = P(R = r|X = 3)$ $\rightarrow$ Bayes.

    (d) Wir wollen die Behauptung „Der Würfel hat mit einer Wahrscheinlichkeit von über 90% mindestens r rote Seiten“ aufstellen. Ermittle ein größtmögliches r und belege die Behauptung.