48. X habe die Dichtefunktion $f_X(x) = 2x$ für $0 \leq x \leq 1$. Y habe die gleiche Verteilung und ist unabhängig von X. Berechne und skizziere die Dichtefunktion von $X + Y$. *Hinweis:* Unterscheide die Fälle $x \leq 1$ und $x \geq 1$, und beachte, dass der Integrationsbereich der Durchschnitt jener Intervalle ist, auf denen die Dichtefunktionen $\neq 0$ sind.

49. Ermittle die charakteristische Funktion der Binomialverteilung. Benutze dafür die Tatsache, dass diese die Summe von n Bernoulli-Versuchen ist. Ermittle außerdem die charakteristische Funktion der Poisson-Verteilung und zeige damit die Konvergenz der Binomialverteilung gegen die Poisson-Verteilung (unter Verwendung der Folge $(1 + \frac{a}{n})^n \xrightarrow{n\to\infty} \mathrm{e}^a$).

50. Ein Kryptographiesystem führt eine gewisse Anzahl n von zufälligen Tests durch, um zu überprüfen, ob ein Schlüssel gültig ist. Bekannt ist, dass bei einem falschen Schlüssel die Wahrscheinlichkeit p, dass ein einzelner Test bestanden wird, immer gleich ist. Du schaffst es, für fünf beliebige Schlüssel zu ermitteln, wie viele Tests bestanden wurden, nämlich:

$$137, 145, 148, 159, 161$$

n und p sind jedoch unbekannt. Welche Verteilung besitzen diese Werte? Ermittle Schätzer (und Schätzwerte) für n und p nach der Momentenmethode.

51. Die Wartezeit eines Servers auf die jeweils nächste Anfrage ist üblicherweise exponentialverteilt. Die Wartezeit X auf die *übernächste* Anfrage ist Erlang-verteilt mit Parameter 2 (mit 2 ist nicht λ gemeint), d.h. $f_X(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}$. Berechne einen Maximum-Likelihood-Schätzer für λ und schätze damit λ aus folgender Stichprobe von X:

$$\{2.7, 8.1, 1.1, 4.9, 3.2\}$$

52. Eine Zufallsvariable X sei gleichverteilt auf $[0, a]$ und $x_1, \ldots, x_n$ eine Stichprobe von X. Überprüfe, ob $\hat{a} := \frac{n+1}{n} \max_i x_i$ ein erwartungstreuer Schätzer für a ist. *Anleitung:* Berechne die Verteilungsfunktion von $\hat{a}$ auf $[0, \frac{n+1}{n} a]$ ($F_{\hat{a}}(x) = P(\hat{a} \leq x)$; außerhalb von $[0, \frac{n+1}{n} a]$ ist $F_{\hat{a}}$ natürlich 0 bzw. 1). Berechne nun die Dichte $f_{\hat{a}}$ durch Ableitung von $F_{\hat{a}}$. Jetzt den Erwartungswert: $\mathrm{E}(\hat{a}) = \int_0^{\frac{n+1}{n} a} x f_{\hat{a}}(x) dx$. Ist das Ergebnis gleich a?

53. Im Skriptum wird gezeigt, dass die empirische Varianz ein erwartungstreuer Schätzer für die Varianz ist. Ist dadurch auch die empirische Standardabweichung s ein erwartungstreuer Schätzer für die Standardabweichung σ? Begründe die Antwort. Hinweis: Betrachte $\mathrm{V}(s)$ und den Verschiebungssatz.