42. Du beziehst von einem Händler Schachteln mit je 100 Glühbirnen. Eine Glühbirne ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% kaputt. X sei die Anzahl der guten Glühbirnen pro Schachtel. Wie ist X verteilt? Ein Schachtel kostet 50€. Du verkaufst die funktionierenden Glühbirnen um 2€ je Stück. Du zahlst keine Steuer. Wieviel Gewinn Y machst du im Schnitt pro Schachtel? Wie groß ist die Standardabweichung des Gewinns?

43. X sei gleichverteilt auf dem Intervall $[-1,1]$ und $Y = X^2$. Zeige, dass $\sigma_{X,Y} = 0$ ist aber X und Y nicht unabhängig sind.

44. Du hast 10 Schachteln mit elektrischen 200Ω-Widerständen. Da die Widerstände in einer Schachtel in einem Arbeitsgang produziert wurden, haben alle exakt den gleichen Widerstandswert. Dieser variiert aber mit einer Standardabweichung von 5Ω um 200Ω. Die Schachteln sind voneinander unabhängig. Du schaltest nun 10 Widerstände in Serie. Dabei addieren sich die Widerstände. Welchen Erwartungswert und welche Standardabweichung erhältst du für den Gesamtwiderstand, wenn du

    (a) alle Widerstände aus einer Schachtel nimmst,

    (b) jeden Widerstand aus einer anderen Schachtel nimmst, oder

    (c) jeweils fünf aus einer Schachtel nimmst?

45. Eine Nachrichtenquelle X produziert aufzählbare Nachrichten mit gewissen Wahrscheinlichkeiten. X ist also eine diskrete Zufallsvariable. Der Informationsgehalt einer Nachricht k ist definiert durch $I(k) = -\log_2 P(X = k)$. $I(X)$ kann man als (transformierte) Zufallsvariable betrachten. Die Entropie, also der mittlere Informationsgehalt der Nachrichtenquelle ist dann einfach $H = \mathrm{E}(I(X))$. X sei nun geometrisch verteilt mit Parameter $p = \frac{1}{4}$. Berechne die Entropie.

46. Ein Nachrichtenquelle X, die geometrisch verteilt ist mit $p = \frac{1}{4}$, wird codiert mit dem Code

$$c(k) = \begin{cases} 1^{(k-1)/2}00 & k \text{ ungerade} \\ 1^{(k-2)/2}01 & k \text{ gerade}, \end{cases}$$

    also $1 \mapsto 00$, $2 \mapsto 01$, $3 \mapsto 100$, $4 \mapsto 101$, $5 \mapsto 1100, \ldots$ L sei die Codelänge dieses Codes. Zeige, dass $P(L-1 = l) = P(X = 2l-1 \vee X = 2l)$ ist, und daraus, dass $L-1$ ebenfalls geometrisch verteilt ist. Berechne daraus die mittlere Codelänge $\mathrm{E}(L)$.

47. Zwei unabhängige Zufallsvariablen X_1 und X_2 seien exponentialverteilt mit verschiedenen Parametern λ_1 und λ_2. Zu berechnen ist allgemein die Wahrscheinlichkeit $P(X_1 < X_2)$. *Hinweis:* Betrachte die gemeinsame Dichte $f(x_1, x_2) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2)$.