31. In einer Urne befinden sich zwei schwarze und drei weiße Kugeln. Es wird so lange eine Kugel *ohne Zurücklegen* gezogen, bis eine schwarze gezogen wird. Sei $X$ die Anzahl der Kugeln, die dabei gezogen wird. Bestimme den Erwartungswert von $X$.

32. Wie Beispiel 31 nur *mit Zurücklegen*. Berechne den Erwartungswert von $X$ sowie die Wahrscheinlichkeit $P(X < 8)$.

33. Die Serienproduktion von Glühbirnen erfolgt mit einem Ausschussanteil von 1%. Aus der laufenden Produktion wird eine Stichprobe vom Umfang $n = 100$ entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält diese Stichprobe drei oder mehr defekte Glühbirnen? Löse das Beispiel mittels

    (a) Binomialverteilung,

    (b) Poissonverteilung als Approximation.

34. *Wiederholung:* Gib die Regeln für die Ableitungen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(af(x)+bg(x))$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\cdot g(x)$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{f(x)}{g(x)}$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(g(x))$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x$ und die unbestimmten Integrale $\int x^n\,\mathrm{d}x$ für $n \neq -1$, $\int af(x)+bg(x)\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$, $\int f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ an, wobei $a$ und $b$ reelle Zahlen, $f'$ und $g'$ die Ableitungen der Funktionen $f$ bzw. $g$ und $F$ und $G$ Stammfunktionen von $f$ bzw. $g$ sind.

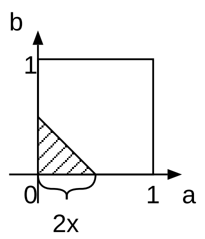
    Löse nun die Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1+x^2}{(2+x)(1-x)}$ und das bestimmte Integral $\int_0^1 (2+x^2)(1-x)\,\mathrm{d}x$.

35. Eine Zufallsvariable $X$ habe den Wertebereich $[0,1]$ und die Dichtefunktion $f_X(x) = Kx(1-x)$.

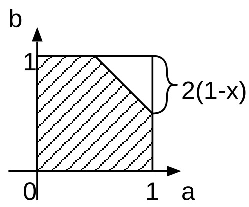
    (a) Berechne die Konstante $K$.

    (b) Berechne Erwartungswert und Varianz von $X$.

36. Betrachte den Mittelpunkt $X = \frac{a+b}{2}$ zweier zufälliger (unabhängig gleichverteilter) Punkte $a, b$ aus dem Einheitsintervall $[0,1]$. Das Ereignis „$X \le x$“ (aus der Ergebnismenge $\Omega = [0,1]^2$) lässt sich für $0 \le x \le 1$ auf folgende Weise darstellen:




für $0 \le x \le \frac{1}{2}$




für $\frac{1}{2} \le x \le 1$

Ermittle die Verteilungsfunktion und die Dichtefunktion von $X$ (jeweils mit Fallunterscheidung $x \le \frac{1}{2}$, $x \ge \frac{1}{2}$) und skizziere diese. Berechne daraus den Erwartungswert und die Varianz von $X$.