40. Eine Nachrichtenquelle X produziert aufzählbare Nachrichten mit gewissen Wahrscheinlichkeiten. X ist also eine diskrete Zufallsvariable. Der Informationsgehalt einer Nachricht k ist definiert durch $I(k) = -\log_2 P(X = k)$. $I(X)$ kann man als (transformierte) Zufallsvariable betrachten. Die Entropie, also der mittlere Informationsgehalt der Nachrichtenquelle ist dann einfach $H = \mathrm{E}(I(X))$. X sei nun geometrisch verteilt mit Parameter $p = \frac{1}{2}$. Berechne die Entropie.

41. X und Y seien zwei exponentialverteilte Zufallsvariablen mit Parametern λ_1 und λ_2, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Berechne die Dichtefunktion von $X + Y$. (Beachte, dass der Integrationsbereich der Durchschnitt jener Bereiche ist, in denen die Dichtefunktionen $\neq 0$ sind.) Skizziere die Dichtefunktion für $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$.

42. Zeige die Reproduktivität der Normalverteilung mit Hilfe von charakteristischen Funktionen. Zeige dazu zuerst, dass $\varphi_{aX}(\omega) = \varphi_X(a\omega)$ ist, und $\varphi_{X+b}(\omega) = \varphi_X(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega b}$. Ermittle damit φ_X für $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. (φ_X für $X \sim N(0,1)$ sei bekannt.) Berechne nun $\varphi_{X_1+X_2}$ für $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ und leite daraus die Verteilung von $X_1 + X_2$ ab.