

41. Du beziehst von einem Händler Schachteln mit je 100 Glühbirnen. Eine Glühbirne ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% kaputt. X sei die Anzahl der guten Glühbirnen pro Schachtel. Wie ist X verteilt? Ein Schachtel kostet 50€. Du verkaufst die funktionierenden Glühbirnen um 2€ je Stück. Du zahlst keine Steuer. Wieviel Gewinn Y machst du im Schnitt pro Schachtel? Wie groß ist die Standardabweichung des Gewinns?
42. X sei gleichverteilt auf dem Intervall $[-1, 1]$ und $Y = X^2$. Zeige, dass $\sigma_{X,Y} = 0$ ist aber X und Y nicht unabhängig sind.
43. Du hast 10 Schachteln mit elektrischen 200Ω -Widerständen. Da die Widerstände in einer Schachtel in einem Arbeitsgang produziert wurden, haben alle exakt den gleichen Widerstandswert. Dieser variiert aber mit einer Standardabweichung von 5Ω um 200Ω . Die Schachteln sind voneinander unabhängig. Du schaltest nun 10 Widerstände in Serie. Dabei addieren sich die Widerstände. Welchen Erwartungswert und welche Standardabweichung erhältst du für den Gesamtwiderstand, wenn du
- (a) alle Widerstände aus einer Schachtel nimmst,
 - (b) jeden Widerstand aus einer anderen Schachtel nimmst, oder
 - (c) jeweils fünf aus einer Schachtel nimmst?
44. Eine Nachrichtenquelle X produziert aufzählbare Nachrichten mit gewissen Wahrscheinlichkeiten. X ist also eine diskrete Zufallsvariable. Der Informationsgehalt einer Nachricht k ist definiert durch $I(k) = -\log_2 P(X = k)$. $I(X)$ kann man als (transformierte) Zufallsvariable betrachten. Die Entropie, also der mittlere Informationsgehalt der Nachrichtenquelle ist dann einfach $H = E(I(X))$. X sei nun geometrisch verteilt mit Parameter $p = \frac{1}{2}$. Berechne die Entropie.
45. Zwei unabhängige Zufallsvariablen X_1 und X_2 seien exponentialverteilt mit verschiedenen Parametern λ_1 und λ_2 . Zu berechnen ist allgemein die Wahrscheinlichkeit $P(X_1 < X_2)$. *Hinweis:* Betrachte die gemeinsame Dichte $f(x_1, x_2) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2)$.