45. Ein Würfel habe R rote und $6-R$ blaue Seiten. Da wir nicht wissen, wie groß R ist, betrachten wir R als gleichverteilte Zufallsvariable, d.h. $P(R=r)=\frac{1}{7}$ für $0 \le r \le 6$. Um Rückschlüsse auf R zu ziehen, ermitteln wir eine Stichprobe: wir würfeln drei mal und erhalten drei mal *rot*. Anders ausgedrückt: X sei die Zufallsvariable, die angibt, wie viele von drei Würfen *rot* ergeben, und wir erhalten $X=3$. Was können wir nun über das „wahre R“ sagen?

    (a) Berechne die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(X=3|R=r)$ für $r=0\dots 6$.

    (b) Berechne die totale Wahrscheinlichkeit $P(X=3)$.

    (c) R' sei die Zufallsvariable, die (wie R) die Anzahl der roten Seiten des Würfels angibt, allerdings unter der Bedingung, dass die Stichprobe $X=3$ ergeben hat. Gib die diskrete Dichte von R' an und skizzieren Sie diese.
    Hinweis: $P(R'=r)=P(R=r|X=3) \quad \rightarrow$ Bayes.

    (d) Wir wollen die Behauptung „Der Würfel hat mit einer Wahrscheinlichkeit von über 90% mindestens r rote Seiten“ aufstellen. Ermittle ein größtmögliches r und belege die Behauptung.

46. Ein Ölvorkommen befindet sich in d Meter Tiefe. Eine aufwändige Echolot-Messung an verschiedenen Positionen ergibt folgende Werte für d:

    $$1074, 1098, 1046, 1128, 1105, 1096, 1078, 1109, 1124, 1084$$

    Der Messfehler ist normalverteilt. Ermittle das Konfidenzintervall für d zu einem Signifikanzniveau von 95%.

    (a) Die Messmethode hat eine bekannte Standardabweichung von 20 Meter.

    (b) Die Standardabweichung ist unbekannt.

47. In Beispiel 46 ist der Fehler normalverteilt. Wenn das nicht gegeben ist, also über die Verteilung der Messfehler nichts bekannt ist, dann kann man die Ungleichung von Tschebyschow $P(|X-E(X)| \ge a) \le \frac{V(X)}{a^2}$ verwenden. Berechne daraus ein Konfidenzintervall. (Tipp: Setze $X=\bar{d}$.)

48. Ein Würfel sollte im Mittel eine Augenzahl von 3.5 zeigen. Ein misstrauischer Spieler testet einen Würfel ausgiebig mit 500 Würfen und erhält $\bar{x}=3.612$ und $s=1.68$. (Nebenbei: wie groß ist nochmal σ bei einem korrekten Würfel?) In welchem Bereich liegt die mittlere Augenzahl mit einer Wahrscheinlichkeit von 95%? Aus welchen Gründen darfst du so rechnen, wie du rechnest?

49. Bei einer Umfrage unter 100 Befragten haben 15 angegeben, Vegetarier zu sein. In welchem Bereich liegt der Anteil der Vegetarier in der Bevölkerung mit einer Sicherheit von 95%?