

41. Zeige die Reproduktivität der Normalverteilung mit Hilfe von charakteristischen Funktionen. Zeige dazu zuerst, dass $\varphi_{aX}(\omega) = \varphi_X(a\omega)$ ist, und $\varphi_{X+b}(\omega) = \varphi_X(\omega)e^{i\omega b}$. Ermittle damit φ_X für $X \sim N(\mu, \sigma)$. (φ_X für $X \sim N(0, 1)$ sei bekannt.) Berechne nun $\varphi_{X_1+X_2}$ für $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ und $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$ und leite daraus die Verteilung von $X_1 + X_2$ ab.
42. Eine Messgröße Z setzt sich aus zwei Teilgrößen auf folgende Art zusammen: $Z = X + Y$. X ist (stetig) gleichverteilt auf dem Intervall $[0, a]$. Y ist gleichverteilt auf $[0, b]$. Eine Stichprobe von Z ergibt

$$z = \{2.5, 2.0, 2.5, 5.5, 4.0, 2.5, 2.0\}.$$

Ermittle Schätzungen für a und b nach der Momentenmethode.

43. Ein Fahrkartenkontrolleur zählt mit, wie viele Passagiere er kontrolliert, bis er einen Schwarzfahrer erwischt. Er erhält folgende Zahlen (inklusive Schwarzfahrer):

$$41, 33, 46, 35, 21, 50$$

Wenn wir den Anteil der Schwarzfahrer mit p bezeichnen, dann sind diese Zahlen eine Stichprobe einer Zufallsvariablen X , die geometrisch verteilt ist. Ermittle einen Schätzer für p mittels Maximum-Likelihood-Methode.

44. Im Skriptum wird gezeigt, dass die empirische Varianz ein erwartungstreuer Schätzer für die Varianz ist. Ist dadurch auch die empirische Standardabweichung s ein erwartungstreuer Schätzer für die Standardabweichung σ ? Begründe die Antwort. Hinweis: Betrachte $V(s)$ und den Verschiebungssatz.