

36. Du wirst von einem Hacker bezahlt, 10.000 Captchas zu knacken. Als Hilfe schlägt ein Programm für jedes Captcha eine Lösung vor, diese stimmt jedoch nur in 60% der Fälle. Sei X die Anzahl der richtig vorgeschlagenen Captchas. Wie ist X verteilt? Du benötigst 3 Sekunden, um ein richtig vorgeschlagenes Captcha zu bestätigen, aber 10 Sekunden, um ein falsch vorgeschlagenes zu lösen. Sei Y die Zeit, die du für die 10.000 Captchas brauchst. Berechne den Erwartungswert und Standardabweichung von Y .
37. X sei gleichverteilt auf dem Intervall $[0, 2]$ und $Y = |X - 1|$. Zeige, dass $\sigma_{X,Y} = 0$ ist, aber X und Y nicht unabhängig sind.
38. Es werden 10 Liter Wein aus 10 Fässern in einen Behälter abgefüllt. Der Wein in den Fässern hat einen Alkoholgehalt von 8% mit einer Standardabweichung von 2%. Die Fässer sind voneinander unabhängig. Berechne Erwartungswert und Standardabweichung des Alkoholgehalts in dem Behälter, wenn
- die 10 Liter aus einem einzigen Fass stammen,
 - jeder Liter aus einem anderen Fass stammt,
 - je zwei Liter aus dem gleichen Fass stammen.
39. Eine Nachrichtenquelle X produziert aufzählbare Nachrichten mit gewissen Wahrscheinlichkeiten. X ist also eine diskrete Zufallsvariable. Der Informationsgehalt einer Nachricht k ist definiert durch $I(k) = -\log_2 P(X = k)$. $I(X)$ kann man als (transformierte) Zufallsvariable betrachten. Die Entropie, also der mittlere Informationsgehalt der Nachrichtenquelle ist dann einfach $H = E(I(X))$. X sei nun geometrisch verteilt mit Parameter $p = \frac{1}{2}$. Berechne die Entropie.
40. X und Y seien zwei exponentialverteilte Zufallsvariablen mit Parametern λ_1 und λ_2 , $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Berechne die Dichtefunktion von $X + Y$. (Beachte, dass der Integrationsbereich der Durchschnitt jener Bereiche ist, in denen die Dichtefunktionen $\neq 0$ sind.) Skizziere die Dichtefunktion für $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$.