

50. X habe die Dichtefunktion $f_X(x) = 2x$ für $0 \leq x \leq 1$. Y habe die gleiche Verteilung und ist unabhängig von X . Berechne und skizziere die Dichtefunktion von $X + Y$. *Hinweis:* Unterscheide die Fälle $x \leq 1$ und $x \geq 1$, und beachte, dass der Integrationsbereich der Durchschnitt jener Intervalle ist, auf denen die Dichtefunktionen $\neq 0$ sind.
51. Ermittle die charakteristische Funktion der Binomialverteilung. Benutze dafür die Tatsache, dass diese die Summe von n Bernoulli-Versuchen ist. Ermittle außerdem die charakteristische Funktion der Poisson-Verteilung und zeige damit die Konvergenz der Binomialverteilung gegen die Poisson-Verteilung (unter Verwendung der Folge $(1 + \frac{a}{n})^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^a$).
52. Ein Kryptographiesystem führt eine gewisse Anzahl n von zufälligen Tests durch, um zu überprüfen, ob ein Schlüssel gültig ist. Bekannt ist, dass bei einem falschen Schlüssel die Wahrscheinlichkeit p , dass ein einzelner Test bestanden wird, immer gleich ist. Du schaffst es, für fünf beliebige Schlüssel zu ermitteln, wie viele Tests bestanden wurden, nämlich:

137, 145, 148, 159, 161

n und p sind jedoch unbekannt. Welche Verteilung besitzen diese Werte? Ermittle Schätzer (und Schätzwerte) für n und p nach der Momentenmethode.

53. Gegeben ist die Dichtefunktion $f(x) = \frac{1}{2}a^3x^2e^{-ax}$ für $x \geq 0$. Ermittle einen Maximum-Likelihood-Schätzer für a und berechne die Schätzung für die Stichprobe:

5.4, 4.1, 8.8, 5.1, 6.6

54. Eine Zufallsvariable X sei gleichverteilt auf $[0, a]$ und $x_1, \dots, x_n$ eine Stichprobe von X . Überprüfe, ob $\hat{a} := \frac{n+1}{n} \max_i x_i$ ein erwartungstreuer Schätzer für a ist. *Anleitung:* Berechne die Verteilungsfunktion von $\hat{a}$ auf $[0, \frac{n+1}{n}a]$ ($F_{\hat{a}}(x) = P(\hat{a} \leq x)$); außerhalb von $[0, \frac{n+1}{n}a]$ ist $F_{\hat{a}}$ natürlich 0 bzw. 1). Berechne nun die Dichte $f_{\hat{a}}$ durch Ableitung von $F_{\hat{a}}$. Jetzt den Erwartungswert: $E(\hat{a}) = \int_0^{\frac{n+1}{n}a} x f_{\hat{a}}(x) dx$. Ist das Ergebnis gleich a ?
55. Ein Würfel habe R rote und $6 - R$ blaue Seiten. Da wir nicht wissen, wie groß R ist, betrachten wir R als gleichverteilte Zufallsvariable, d.h. $P(R = r) = \frac{1}{7}$ für $0 \leq r \leq 6$. Um Rückschlüsse auf R zu ziehen, ermitteln wir eine Stichprobe: wir würfeln drei mal und erhalten drei mal *rot*. Anders ausgedrückt: X sei die Zufallsvariable, die angibt, wie viele von drei Würfeln *rot* ergeben, und wir erhalten $X = 3$. Was können wir nun über das „wahre R “ sagen?
- Berechne die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(X = 3 | R = r)$ für $r = 0 \dots 6$.
 - Berechne die totale Wahrscheinlichkeit $P(X = 3)$.
 - R' sei die Zufallsvariable, die (wie R) die Anzahl der roten Seiten des Würfels angibt, allerdings unter der Bedingung, dass die Stichprobe $X = 3$ ergeben hat. Gib die diskrete Dichte von R' an und skizzieren Sie diese.
Hinweis: $P(R' = r) = P(R = r | X = 3) \rightarrow$ Bayes.
 - Wir wollen die Behauptung „Der Würfel hat mit einer Wahrscheinlichkeit von über 90% mindestens r rote Seiten“ aufstellen. Ermittle ein größtmögliches r und belege die Behauptung.