1 Deskriptive Statistik

1.1. Berechne für eine gegebene Stichprobe zu den Klassengrenzen ... alle relativen Häufigkeiten und zeichne ein skaliertes Histogramm mit relativen Häufigkeiten, wobei der Flächeninhalt der Balken den Häufigkeiten entsprechen soll.

1.2. Gegeben ist eine Häufigkeitstabelle. Berechne das arithmetische Mittel, die Standardabweichung, den Median, das n. Quartil und den Modus.

1.3. Wie hängt das empirische Quantil mit der empirischen Verteilungsfunktion zusammen?

2 Korrelation und Regression

2.1. Berechne aus einer zweidimensionalen Stichprobe den Korrelationskoeffizienten und die Regressionsgerade (a, b). Zeichne den Scatterplot und dort die Regressionsgerade ein.

2.2. Was ist der Unterschied zwischen linearer Regression und einem linearen Regressionsmodell?

2.3. Zeige: Die Lösung einer linearen Regression ergibt sich aus der Lösung des linearen Gleichungssystems $Ca = b$, wobei a der Vektor der m Parameter $a_1, a_2, \ldots$ ist, C eine $m \times m$ Matrix und b ein m-Vektor ist mit

$$C_{k,l} = \sum_{i=1}^{n} f_k(x_i) f_l(x_i)\,, \qquad b_k = \sum_{i=1}^{n} y_i f_k(x_i)\,.$$

3 Ereignis- und Wahrscheinlichkeitsraum

3.1. Zeige, dass $(\Omega, \Sigma) = (\{1,2,3,4\}, \{\emptyset, \{1,2\}, \{3,4\}, \{1,2,3,4\}\})$ ein Ereignisraum ist.

3.2. Für (Ω, Σ) wie in 3.1 und $P(\{1,2\}) = 0.3$, vervollständige P, so dass (Ω, Σ, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum ist.

3.3. Beweise den Additionssatz.

4 Kombinatorik

Siehe PS-Beispiele.

5 Bedingte Wahrscheinlichkeit

5.1. Beispiel zu totaler Wahrscheinlichkeit und Entscheidungsbaum (ähnlich zu Glühlampenkartons aus PS).

5.2. Beispiel zu Bayes (siehe PS).

5.3. Formuliere und beweise den Satz von Bayes für Bedingung/Gegenbedingung B, $\bar{B}$.

6 Zufallsvariablen

6.1. Erwartungswert und Varianz einer konkreten (neuen aber einfachen) diskreten oder stetigen Verteilung ausrechnen.

6.2. Definiere die Binomial-/geometrische Verteilung und leite Erwartungswert und Varianz her.

6.3. Erwartungswert herleiten für Poissonverteilung $f_X(k) = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$.

6.4. Erwartungswert herleiten für Normalverteilung. Hinweis: zuerst Dichtefunktion differenzieren.

6.5. Definiere die Exponentialverteilung. Leite Verteilungsfunktion und Erwartungswert her.

6.6. Beispiel zur Poissonapproximation.

6.7. Beispiel zur Normalapproximation.

6.8. Definiere die Student-t/χ^2/F-Verteilung. Welche Parameter besitzt die Verteilung? Wo wird diese Verteilung verwendet?

6.9. Beispiel ähnlich zu: Widerstände aus verschiedenen Schachteln ausgewählt mit gleichem Widerstand innerhalb und verschiedenem Widerstand zwischen Schachteln, aber gleichem Erwartungswert und gleicher Standardabwichung. Gesucht: Gesamterwartungswert und -standardabweichung. Siehe PS.

6.10. Definiere die Kovarianz zweier Zufallsvariablen. Für X und Y unabhängig mit der gleichen Verteilung, zeige: $\mathrm{V}(X+Y) = 2\,\mathrm{V}(X)$, aber $\mathrm{V}(2X) = 4\,\mathrm{V}(X)$.

6.11. X und Y unabhängig mit selber spezieller einfacher Dichtefunktion. Berechne f_{X+Y}.

7 Zentraler Grenzwertsatz

7.1. Zeige: Wenn $X \sim N_{0,1}$, dann ist $\varphi_X = e^{-\frac{\omega^2}{2}}$. Vorgehensweise: Dichtefunktion ableiten, dann zeigen, dass $e^{-\frac{\omega^2}{2}}$ die dabei entstehende Differentialgleichung erfüllt.

7.2. Zeige: Es sei $Y_n := \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$ mit $X_k \sim N_{0,1}$ und unabhängig. Dann gilt $\varphi_{Y_n}(\omega) \xrightarrow{n\to\infty} e^{-\frac{\omega^2}{2}}$. Vorgangsweise: Zeige $\varphi_{Y_n} = \varphi^n_{\frac{X}{\sqrt{n}}}$, setze die Exponentialreihe ein, behalte nur die ersten drei Glieder, erkläre, warum die anderen zu vernachlässigen sind, lasse dann unter Verwendung von $(1+\frac{a}{n})^n \xrightarrow{n\to\infty} e^a$ das n nach unendlich gehen.

8 Schätzer

8.1. Schätzer entwickeln für spezielle einfache Verteilung mit Maximum Likelihood- oder Momentenmethode.

8.2. Speziellen Schätzer auf Erwartungstreuheit überprüfen.

8.3. Zeige, dass s^2 ein erwartungstreuer Schätzer für $V(X)$ ist.

9 Konfidenzintervalle

Die Formeln für die Konfidenzintervalle stehen auf dem Angabeblatt.

9.1. Für bestimme Stichprobe einer Normalverteilung Konfidenzintervall für μ und/oder σ ausrechnen, wobei σ bekannt/unbekannt sein kann. Siehe PS-Beispiele.

9.2. Zeige: $\frac{n-1}{\sigma^2}s^2 \sim \chi^2_{n-1}$.

9.3. Zeige: $\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$.

10 Tests

Die Formeln für die Annahmebereiche stehen auf dem Angabeblatt.

10.1. Leite den Annahmebereich für den ein-/zweiseitigen t-Test her.

10.2. t-Test/ANOVA/χ^2-Anpassungstest/χ^2-Unabhängigkeitstest auf bestimmter Stichprobe durchführen. Siehe PS-Beispiele.

10.3. Wie funktioniert der Kolmogorow-Smirnow-Test? Was ist die Nullhypothese?

11 Simulation

11.1. Berechne Zufallszahlen mit dem additiven Kongruenzgenerator. Parameter und Seed sind gegeben, die Formel nicht.

11.2. Formuliere die Methode der inversen Transformation für nicht-gleichverteilte Zufallsvariablen und beweise sie.

11.3. Methode der inversen Transformation anwenden für einfache Verteilung.

11.4. Was ist eine Monte-Carlo-Methode?

11.5. Erkläre kurz die Vorgangsweise bei der Simulation zeitlicher Prozesse.