49. Ein Kryptographiesystem führt eine gewisse Anzahl n von zufälligen Tests durch, um zu überprüfen, ob ein Schlüssel gültig ist. Bekannt ist, dass bei einem falschen Schlüssel die Wahrscheinlichkeit p, dass ein einzelner Test bestanden wird, immer gleich ist. Du schaffst es, für fünf beliebige Schlüssel zu ermitteln, wie viele Tests bestanden wurden, nämlich:

$$137, 145, 148, 159, 161$$

n und p sind jedoch unbekannt. Welche Verteilung besitzen diese Werte? Ermittle Schätzer (und Schätzwerte) für n und p nach der Momentenmethode.

50. Gegeben ist die Dichtefunktion $f(x) = \frac{1}{2}a^3x^2e^{-ax}$ für $x \geq 0$. Ermittle einen Maximum-Likelihood-Schätzer für a und berechne die Schätzung für die Stichprobe:

$$5.4, 4.1, 8.8, 5.1, 6.6$$

51. Eine Zufallsvariable X sei gleichverteilt auf $[0, a]$ und $x_1, \ldots, x_n$ eine Stichprobe von X. Überprüfe, ob $\hat{a} := \frac{n+1}{n} \max_i x_i$ ein erwartungstreuer Schätzer für a ist. *Anleitung:* Berechne die Verteilungsfunktion von $\hat{a}$ auf $[0, \frac{n+1}{n}a]$ ($F_{\hat{a}}(x) = P(\hat{a} \leq x)$; außerhalb von $[0, \frac{n+1}{n}a]$ ist $F_{\hat{a}}$ natürlich 0 bzw. 1). Berechne nun die Dichte $f_{\hat{a}}$ durch Ableitung von $F_{\hat{a}}$. Jetzt den Erwartungswert: $\mathrm{E}(\hat{a}) = \int_0^{\frac{n+1}{n}a} x f_{\hat{a}}(x)dx$. Ist das Ergebnis gleich a?

52. Ein Würfel habe R rote und $6 - R$ blaue Seiten. Da wir nicht wissen, wie groß R ist, betrachten wir R als gleichverteilte Zufallsvariable, d.h. $P(R = r) = \frac{1}{7}$ für $0 \leq r \leq 6$. Um Rückschlüsse auf R zu ziehen, ermitteln wir eine Stichprobe: wir würfeln drei mal und erhalten drei mal *rot*. Anders ausgedrückt: X sei die Zufallsvariable, die angibt, wie viele von drei Würfen *rot* ergeben, und wir erhalten $X = 3$. Was können wir nun über das „wahre R" sagen?

    (a) Berechne die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(X = 3|R = r)$ für $r = 0 \ldots 6$.

    (b) Berechne die totale Wahrscheinlichkeit $P(X = 3)$.

    (c) R' sei die Zufallsvariable, die (wie R) die Anzahl der roten Seiten des Würfels angibt, allerdings unter der Bedingung, dass die Stichprobe $X = 3$ ergeben hat. Gib die diskrete Dichte von R' an und skizzieren Sie diese.
    Hinweis: $P(R' = r) = P(R = r|X = 3)$ $\quad\rightarrow$ Bayes.

    (d) Wir wollen die Behauptung „Der Würfel hat mit einer Wahrscheinlichkeit von über 90% mindestens r rote Seiten" aufstellen. Ermittle ein größtmögliches r und belege die Behauptung.