Ein statistisches Maß für die Ungleichmäßigkeit von Punkten auf einer Fläche zur Bewertung der Stern-Verteilung auf der Nebra-Scheibe

Rade Kutil, 2014

Zur Quantifizierung der Ungleichmäßigkeit der Verteilung von Punkten auf einer Fläche schlage ich ein Maß U vor, das sich aus zwei Teilen zusammensetzt. Wenn i und j zwei Punkte aus einer gegebenen Menge von n Punkten sind, dann sei $d(i,j)$ die Distanz der zwei Punkte. Die *mittlere Distanz* D der Punktmenge ist dann

$$D = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} d(i,j)\,,$$

wobei N die Anzahl der möglichen Punktpaare (i,j) ist. Es ist

$$N = \frac{n(n-1)}{2}\,.$$

D ist also die Summe der Distanzen aller möglichen Punktpaare dividiert durch deren Anzahl. Der zweite Teil ist die *mittlere Nähe* E der Punktmenge, wobei unter *Nähe* der Kehrwert der Distanz zu verstehen ist. Es ist also

$$E = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{1}{d(i,j)}\,.$$

Die *Ungleichmäßigkeit* U ist dann definiert durch

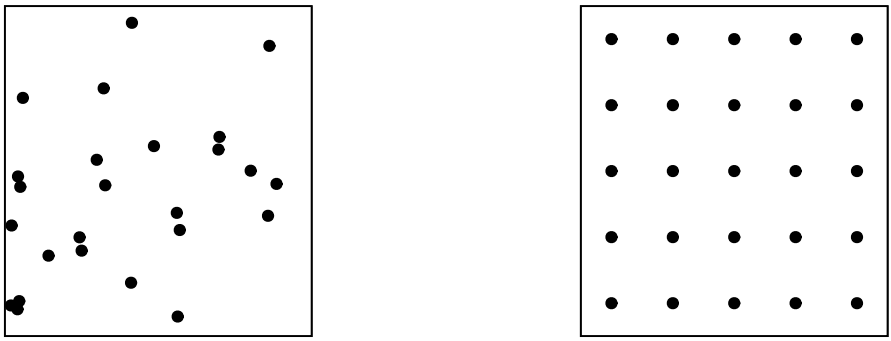
$$U = D \cdot E\,.$$

Dieses Maß ist unabhängig von der Skalierung der Punktmenge, weil zum Beispiel die Multiplikation aller Distanzen mit dem Faktor 2 bewirken würde, dass D doppelt so groß wird aber E auf die Hälfte sinkt, sodass U gleich bleibt.

Abbildung 1 zeigt Ergebnisse für das Maß U für eine zufällige ungleichmäßige Punktverteilung und eine gitterartig geordnete gleichmäßige Verteilung. Erstere hat einen deutlich höheren Ungleichmäßigkeitswert.

Abbildung 2 zeigt die Verteilung (Dichtefunktion) von U für 25 zufällige Punkte auf einer quadratischen Fläche, wie in Abbildung 1(a) dargestellt. Die Dichtefunktion wurde mit einer Simulation von 1.000.000 Sets von 25 Punkten und gaußscher Kerndichteschätzung (kernel density estimation, $\sigma = 0.02$) ermittelt.

Das Maß U ist leider nicht von der Anzahl der Punkte unabhängig. So zeigt eine Simulation für nur 5 Punkte in Abbildung 3 deutlich niedrigere und stärker



(a) zufällig: $U = 1.5905$

(b) geordnet: $U = 1.2543$

Abbildung 1: Beispiele für Ungleichmäßigkeit von 25 Punkten.

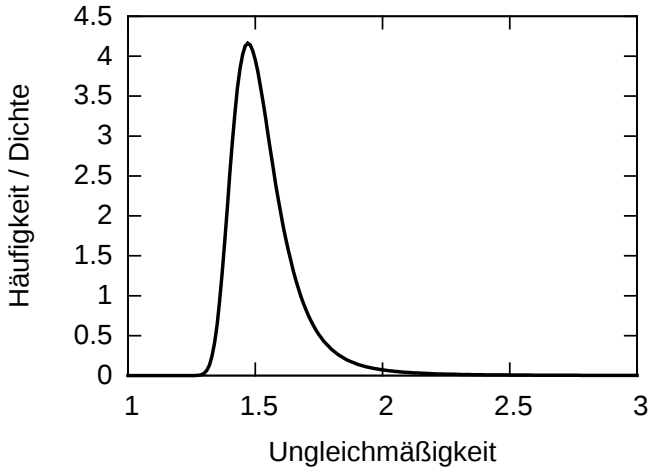


Abbildung 2: Verteilung der Ungleichmäßigkeit bei 25 zufälligen Punkten in einem Quadrat.

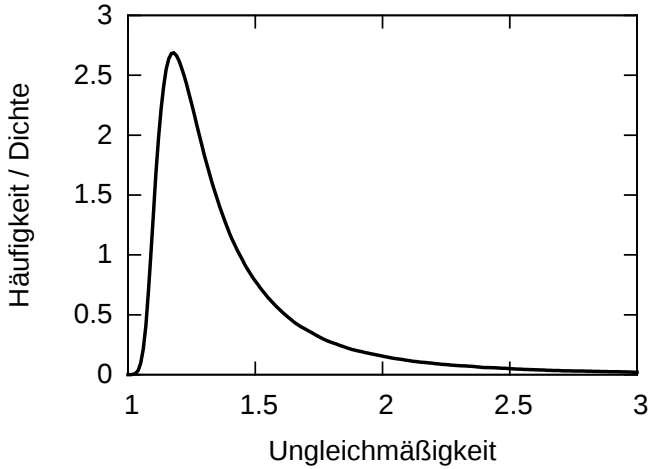


Abbildung 3: Verteilung der Ungleichmäßigkeit bei nur 5 zufälligen Punkten in einem Quadrat.

variierende Werte. Höhere Punktanzahlen tendieren zu einem Mittelwert bei ungefähr 1.6 und kleiner werdender Standardabweichung.

Die Punktverteilung der 25 Punkte auf der Nebra-Scheibe (ohne „Plejaden“) ergibt einen Wert von 1.325. Dieser Wert ist für eine zufällige Punktverteilung nach Abbildung 2 viel zu klein. Nur 0.067% der simulierten Punktsets ergeben einen kleineren Wert. Die Punktverteilung auf der Nebra-Scheibe ist also tatsächlich signifikant zu gleichmäßig.

Um den Einfluss der Form und der Aussparungen für „Mond“ und „Sonne“ auf der Scheibe zu klären, zeigt Abbildung 4 eine ähnliche Simulation, bei der die Punkte auf den belegbaren Bereich der Scheibe beschränkt wurden. Die Verteilung ergibt noch etwas höhere Werte, da die Einschränkung zu höherer Punktkonzentration in den Freiräumen führt. Hier sind sogar nur 0.004% der Werte kleiner als der der Punkte auf der Nebra-Scheibe.

Um die Möglichkeit der Sternbilddarstellung auf der Nebra-Scheibe zu untersuchen, betrachten wir nun die heute bekannten Sternbilder, und dort nur jene Sterne, die üblicherweise zu einer Figur verbunden werden. Wir wählen jene 48 Sternbilder mit mindestens 5 Sternen aus und erhalten die Ungleichmäßigkeitswerte in Abbildung 5 und Abbildung 7. Diese scheinen mit den Verteilungen aus Abbildung 2 und Abbildung 3 konsistent zu sein.

Wir betrachten nun Teilmengen der Punkte auf der Nebra-Scheibe mit $k = 5$ bis $k = 25$ Sternen. Die Teilmengen sind so eingeschränkt, dass sie jeweils die

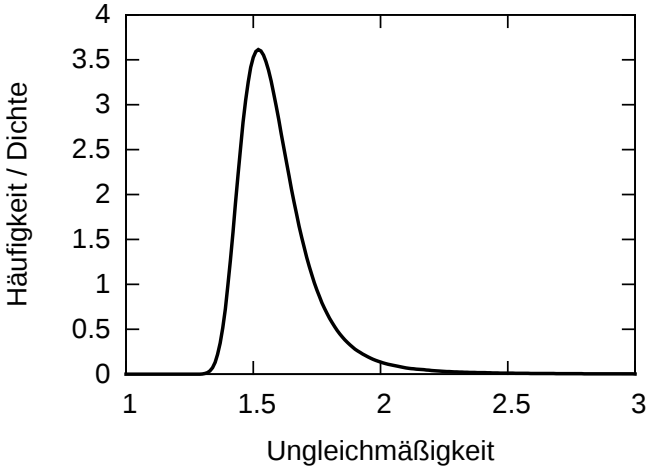


Abbildung 4: Verteilung der Ungleichmäßigkeit bei 25 zufälligen Punkten auf der Nebra-Scheibe mit ausgenommenem Mond/Sonne.

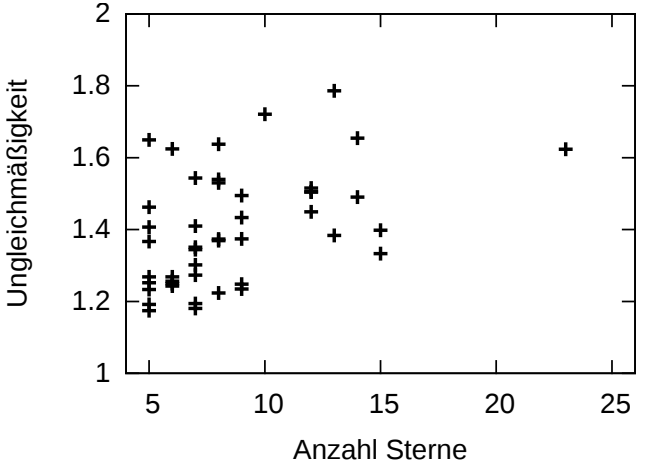


Abbildung 5: Die Ungleichmäßigkeit von 48 heutigen Sternbildern mit mindestens 5 Sternen.

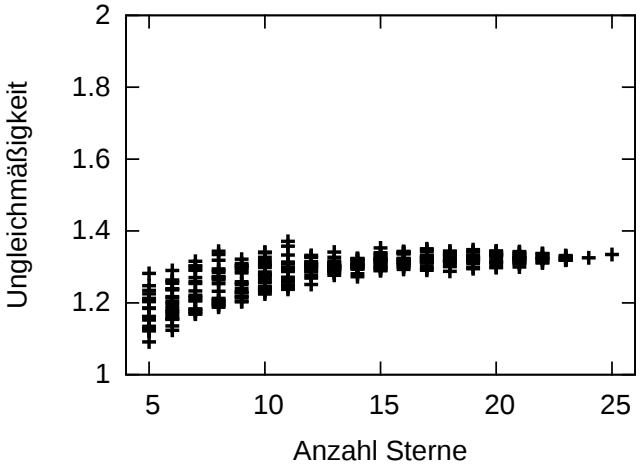


Abbildung 6: Die Ungleichmäßigkeit von zusammen liegenden Teilmengen der Sterne auf der Nebra-Scheibe.

nächsten k Punkte eines der 25 Punkte sein müssen. Auf diese Weise werden zusammenliegende Punktgruppen gebildet. Diese Punktgruppen untersuchen wir nun auf Ungleichmäßigkeit und bekommen die Werte in Abbildung 6.

Die Werte liegen zwar im unteren Bereich der Werte in Abbildung 5. Allerdings liegen sie nun nicht mehr signifikant darunter, es gibt sogar einige Überschneidungen. Das ermöglicht die These, dass die Punkte auf der Nebra-Scheibe eine Nebeneinander-Platzierung von echten Sternbildern ist. In diesem Fall wäre die Punktverteilung *nicht* signifikant zu gleichmäßig. Zusätzliche Gleichmäßigkeit könnte außerdem entstanden sein durch (1) Weglassen oder Zusammenlegung von eng zusammen liegenden Sternen zwecks besserer Darstellbarkeit oder ästhetischer Wirkung, (2) Auswahl gleichmäßigerer Sternbilder aus ähnlichen Gründen, oder (3) stilisierte Darstellung, d.h. Vergrößerung kleiner Abstände und umgekehrt. Die Auswahl der Punktgruppen in Abbildung 6 selektiert außerdem Gruppen mit kreisförmigem Umfang und daher kleineren Werten, während die Scheibe auch länglichere Sternbilder enthalten könnte, die größere Werte liefern.

Aqr	10	1.72081	Cyg	9	1.3741	Pav	7	1.1805
Aql	8	1.37378	Del	5	1.36673	Peg	9	1.49492
Ara	7	1.35101	Dra	14	1.49028	Per	6	1.24934
Aur	7	1.19416	Eri	23	1.62372	Psc	13	1.78623
Boo	7	1.27302	Gem	8	1.36941	PsA	5	1.46219
Cnc	5	1.26831	Gru	8	2.09994	Pup	8	1.52981
CMa	8	1.53976	Her	15	1.39795	Ret	5	1.64955
Cap	12	1.44939	Hya	19	2.57677	Sgr	13	1.38372
Car	7	1.40978	Lac	5	1.1917	Sco	14	1.65464
Cas	5	1.17422	Leo	9	1.43317	Ser	6	1.62445
Cen	12	1.50417	Lep	8	1.22336	Ser	7	1.54334
Cep	7	1.30147	Lup	9	1.23447	Tau	7	2.17451
Cet	12	1.51542	Lyr	5	1.23314	UMa	15	1.33286
Col	5	1.40708	Mus	6	1.24261	UMi	7	1.34425
CrA	6	1.26856	Oph	12	1.50511	Vir	9	1.24826
CrB	6	1.2563	Ori	8	1.63763	Vol	5	1.25188

Abbildung 7: Anzahl der Sterne und Ungleichmäßigkeit der einzelnen heutigen Sternbilder.