Iteriertes Funktionensystem

Martin Aigner
Rainer Brodinger
Martin Rieger

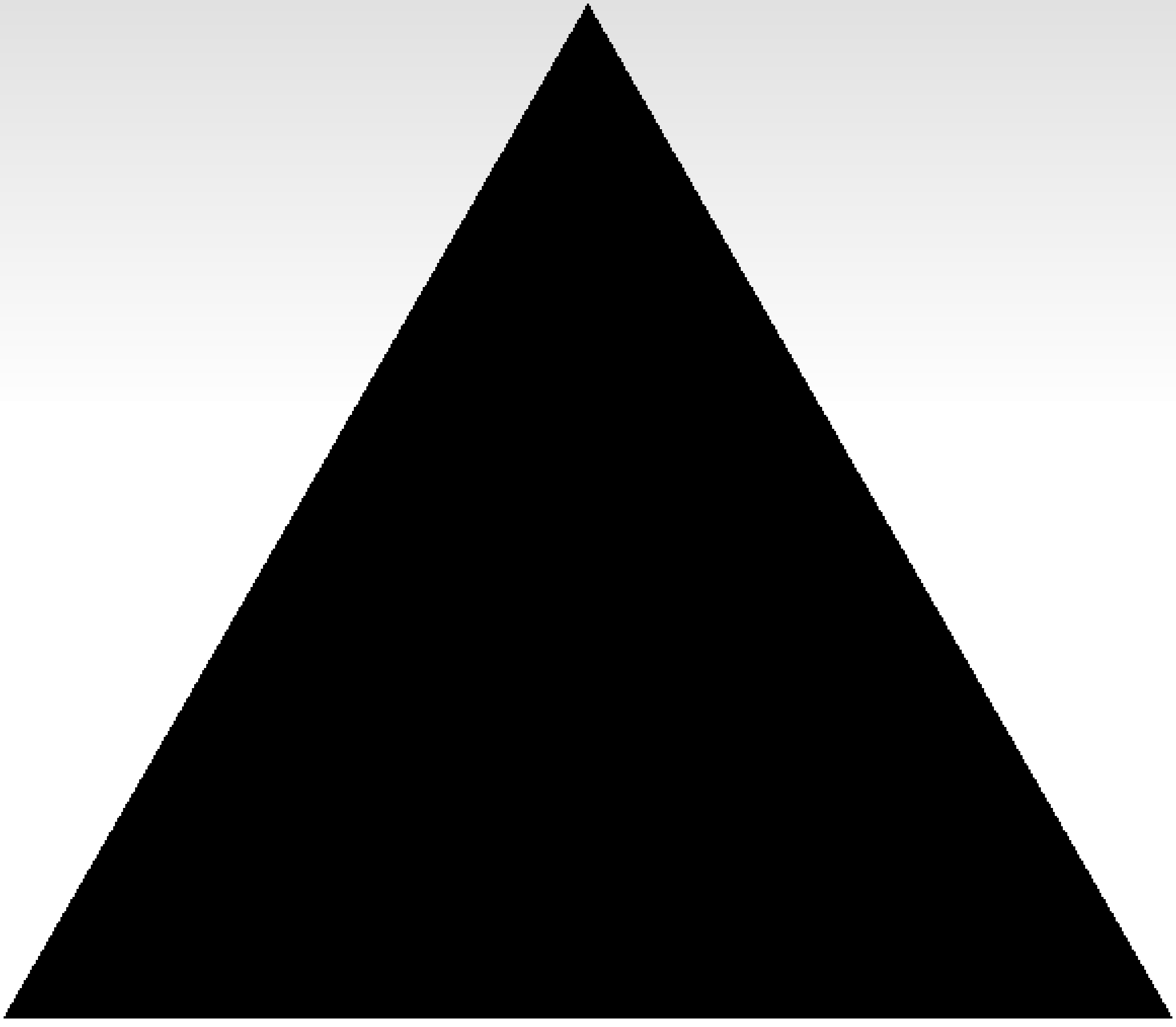
Agenda

- Einleitendes Beispiel
- Definition und Beschreibung
- Einsatzgebiete / Anwendungen
- weitere Beispiele

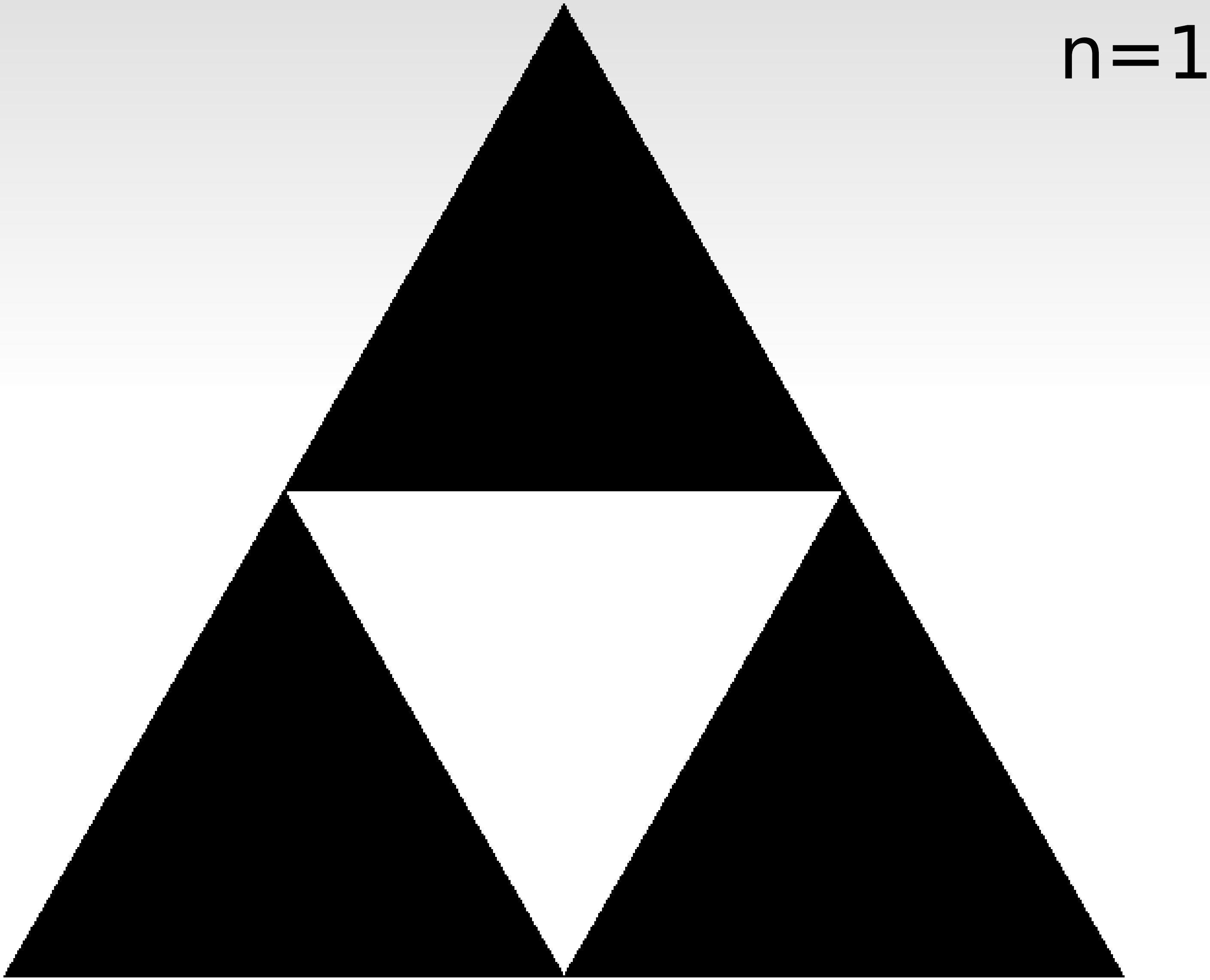
Sierpinski-Dreieck

"Das Sierpinski-Dreieck entsteht aus einem gleichseitigen Dreieck, aus dem das Mittendreieck entfernt wird.
Dadurch zerfällt das Dreieck in 3 weitere Teildreiecke, aus denen wiederum die Mittendreiecke entfernt werden.
Der Grenzwert des Verfahrens liefert das gesuchte Dreieck."

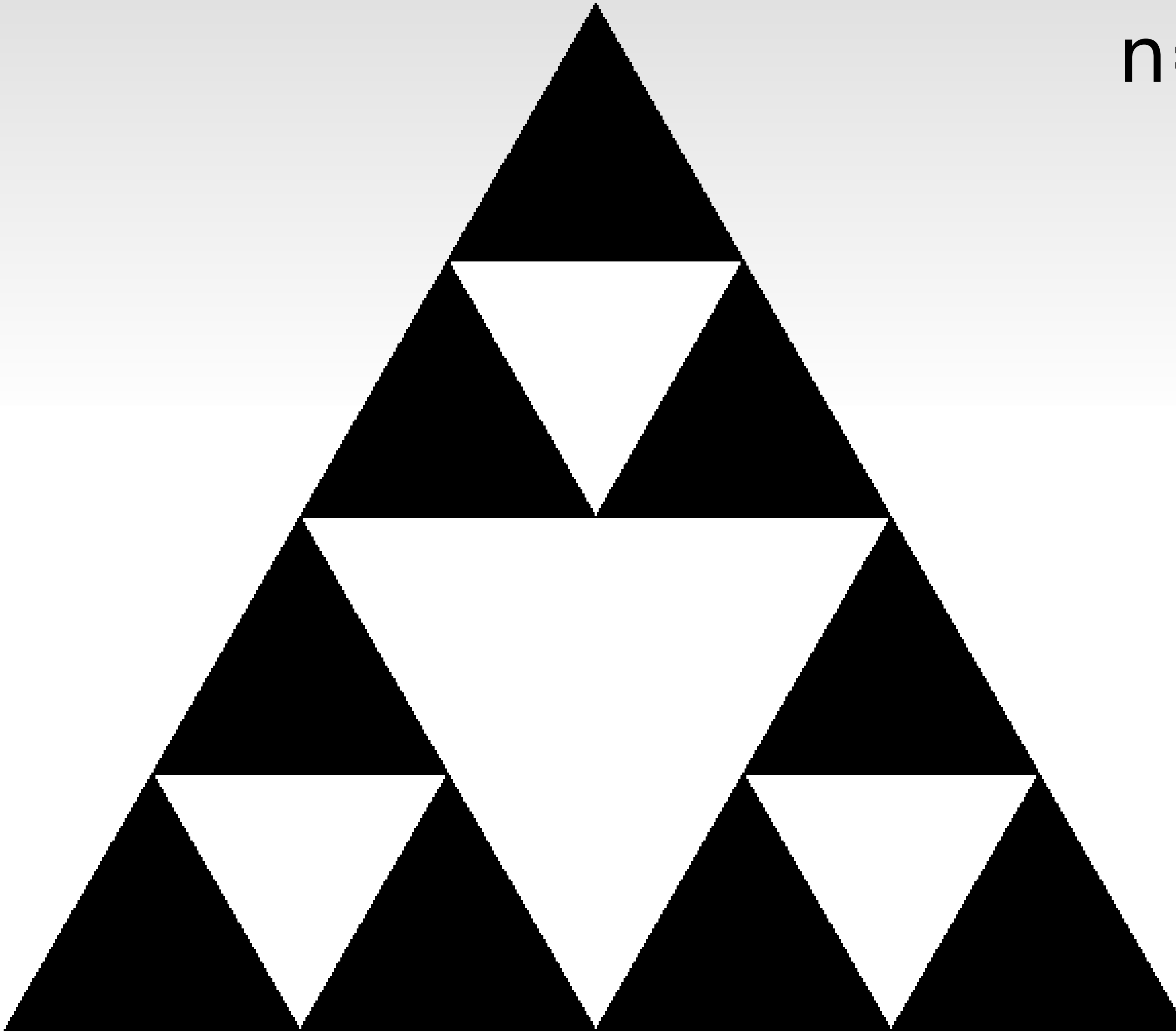
Sierpinski-Dreieck



Sierpinski-Dreieck

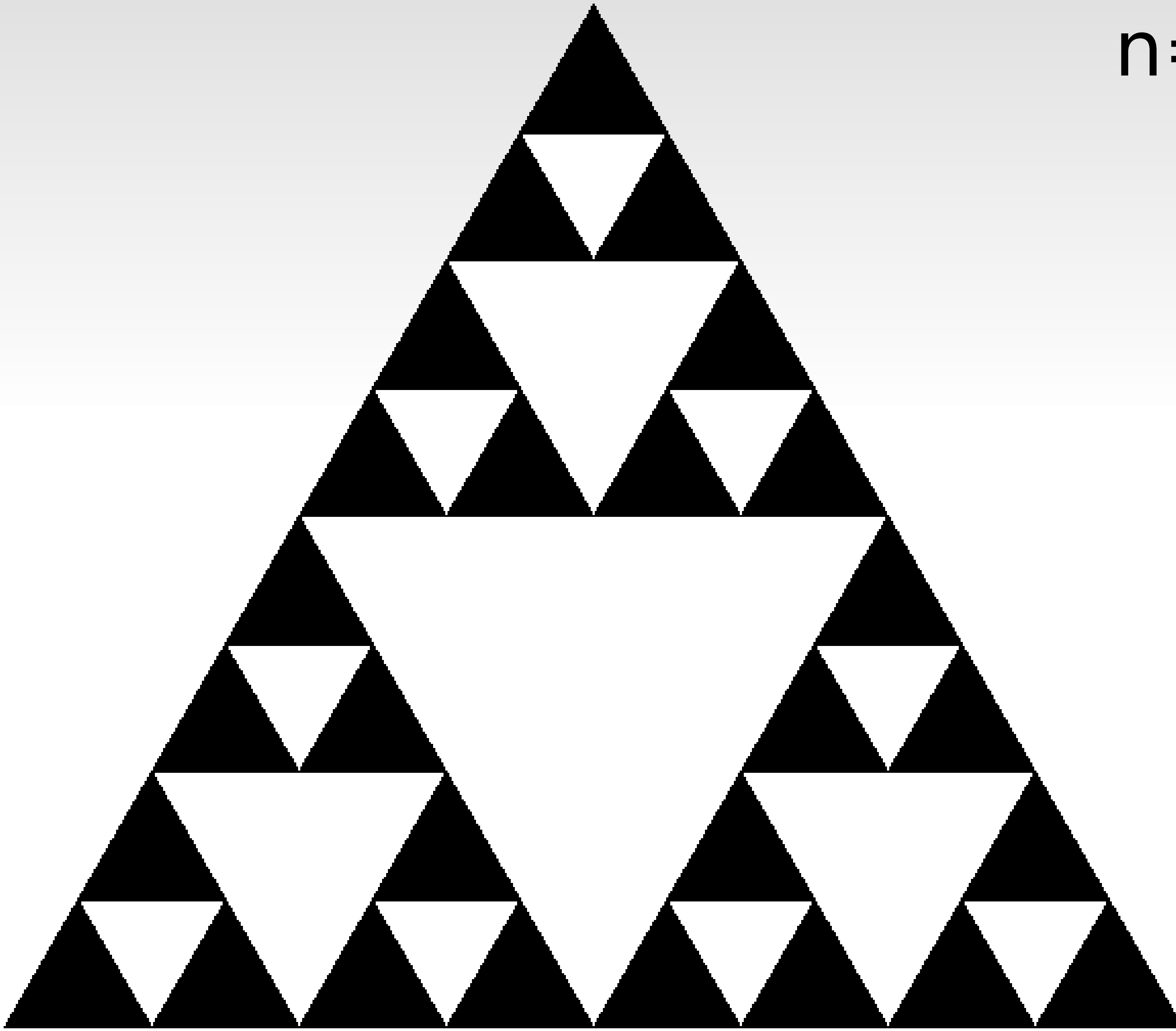


Sierpinski-Dreieck



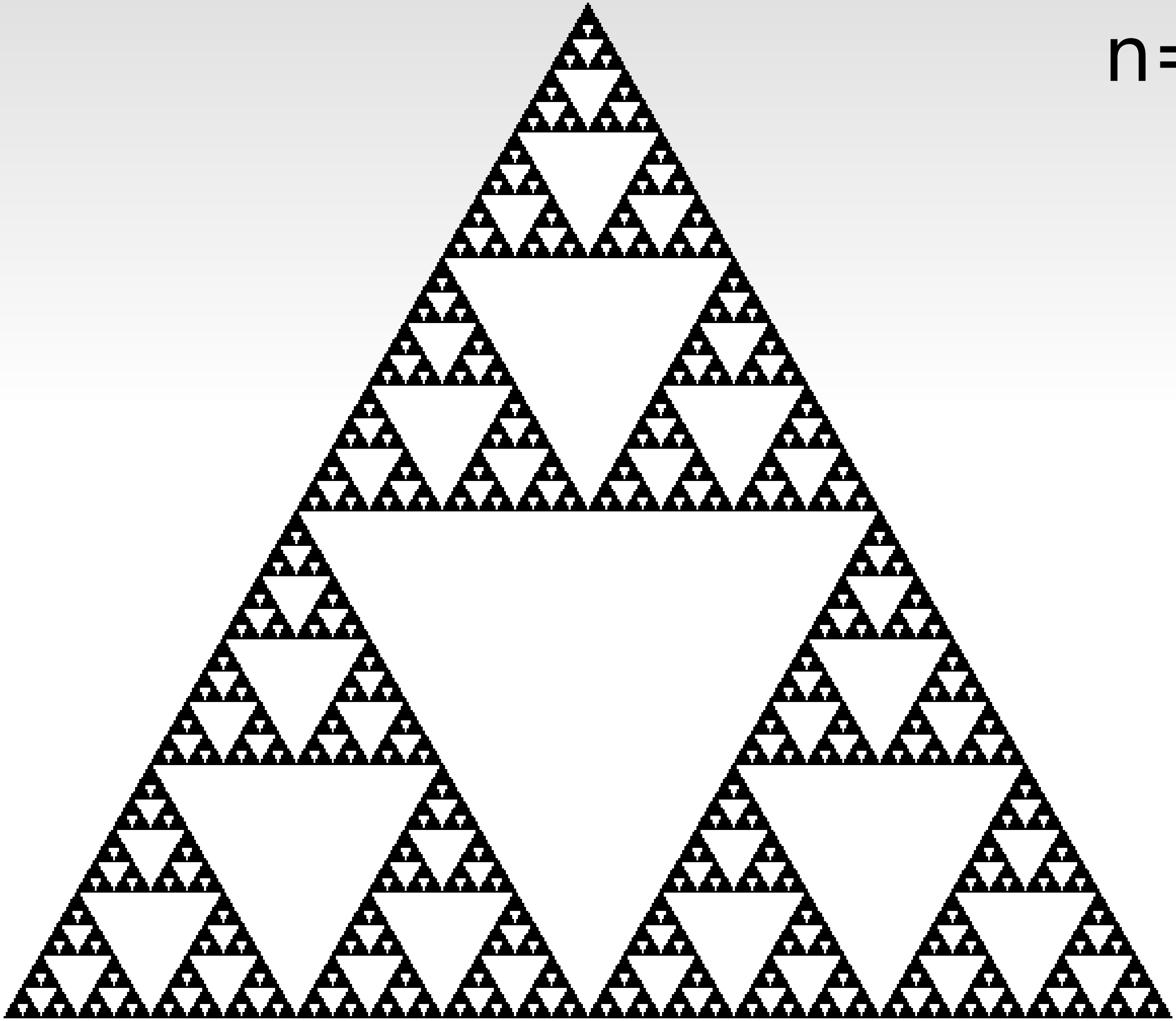
n=2

Sierpinski-Dreieck



n=3

Sierpinski-Dreieck



Fläche des Sierpinski-Dreiecks

$$A_0 \ldots \mathit{Ausgangsfläche}\ , a_0 \ldots \mathit{Seitenlänge}$$

$$A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a_0^2 ; a_1 = \frac{1}{2} \cdot a_0$$

$$A_1 = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a_1^2 = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{2} a_0 \right)^2 = \frac{3}{4} \cdot A_0$$

$$A_2 = \frac{3}{4} \cdot A_1 \rightarrow A_2 = \left(\frac{3}{4} \right)^2 A_0 \rightarrow A_n = \left(\frac{3}{4} \right)^n A_0$$

$$\rightarrow \boldsymbol{A_{S.-D.}} = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n A_0 = \mathbf{0}$$

Umfang des Sierpinski-Dreiecks

$$U_0 \ldots U.\,Ausgangsdreieck\;, a_0 \ldots Seitenlänge$$

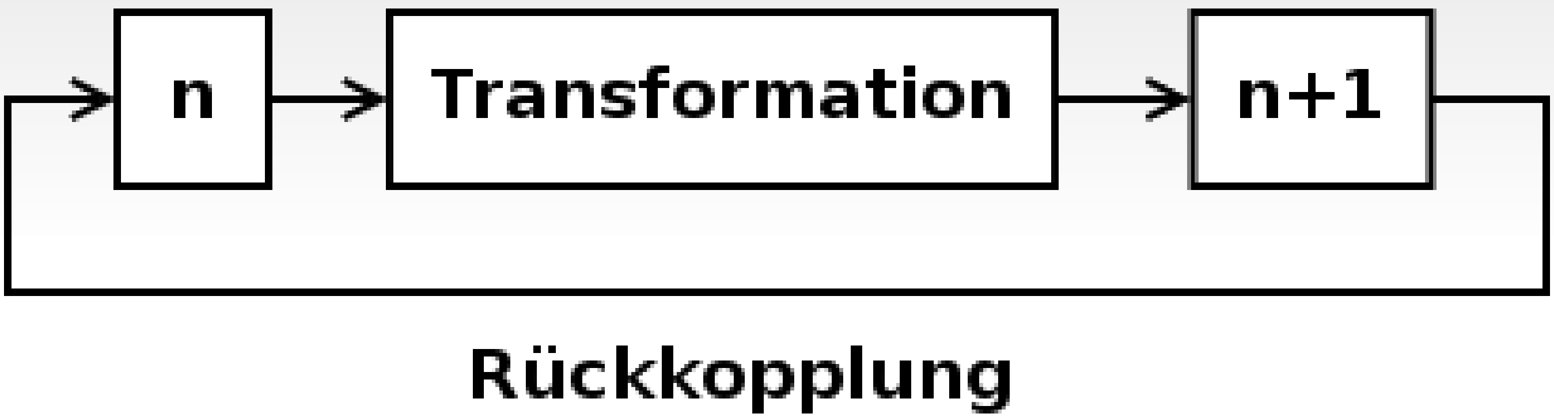
$$U_0 = 3 \cdot a_0\,; a_1 = \frac{1}{2} \cdot a_0$$

$$U_1 = 3(3 \cdot a_1) = 3\left(3 \cdot \frac{1}{2} \cdot a_0\right) = \frac{3}{2}(3 \cdot a_0) = \frac{3}{2} \cdot U_0$$

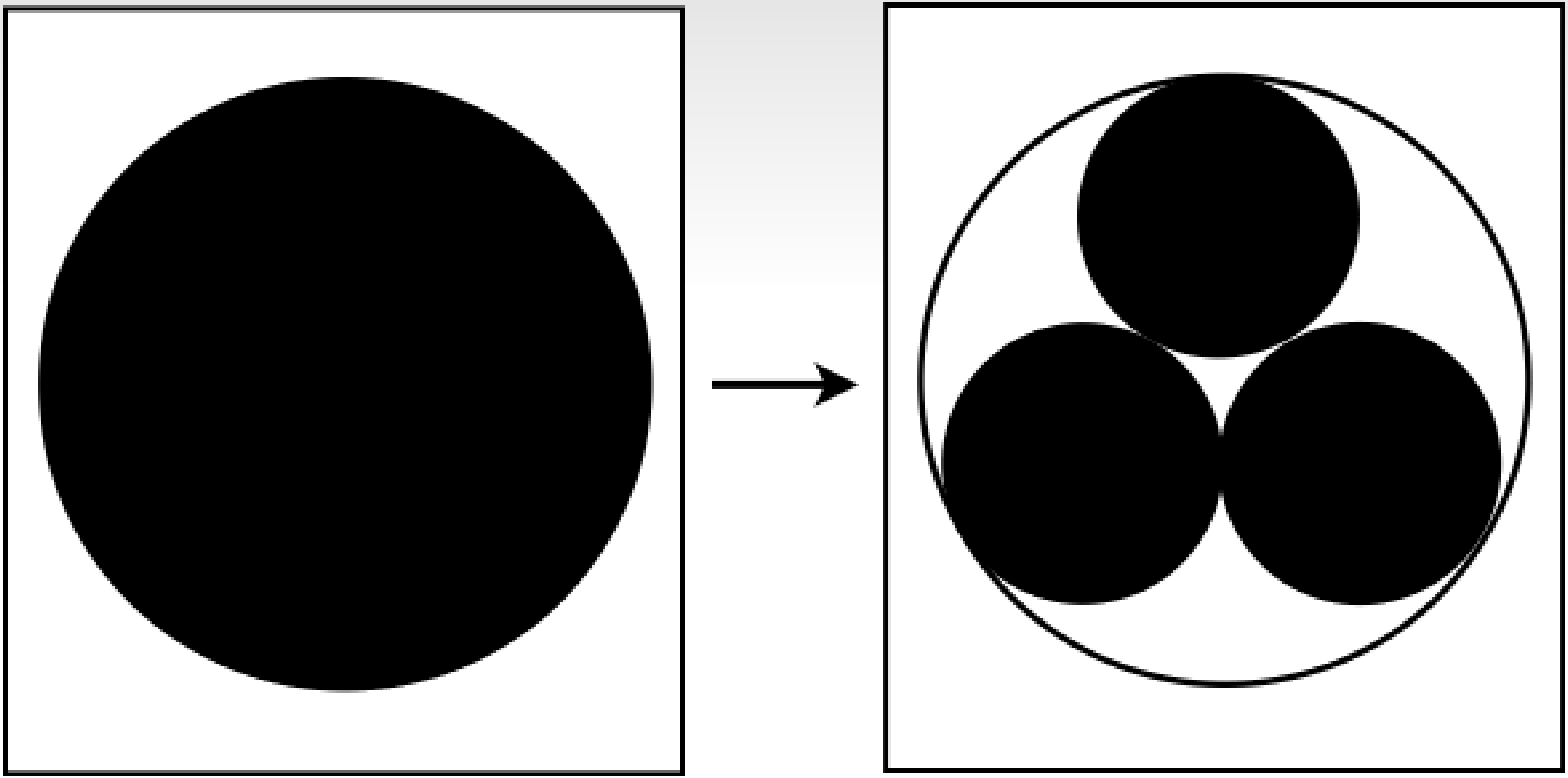
$$U_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot U_0$$

$$\rightarrow \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{S.-D.}} = \lim_{n \to \infty} U_n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n U_0 = \infty$$

Rückkopplungsmaschine



Mehrfach-Verkleinerungs-Kopiermaschine (MVKM)



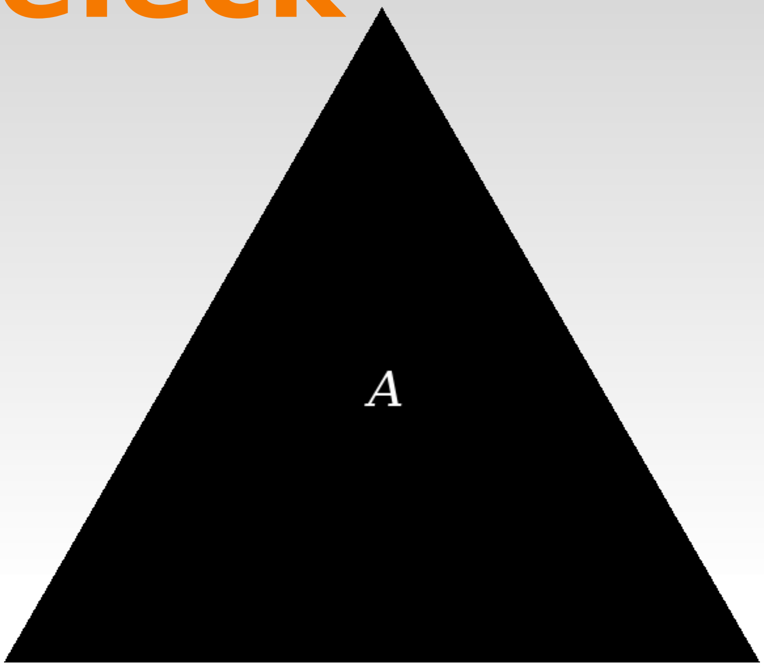
Sierpinski-Dreieck

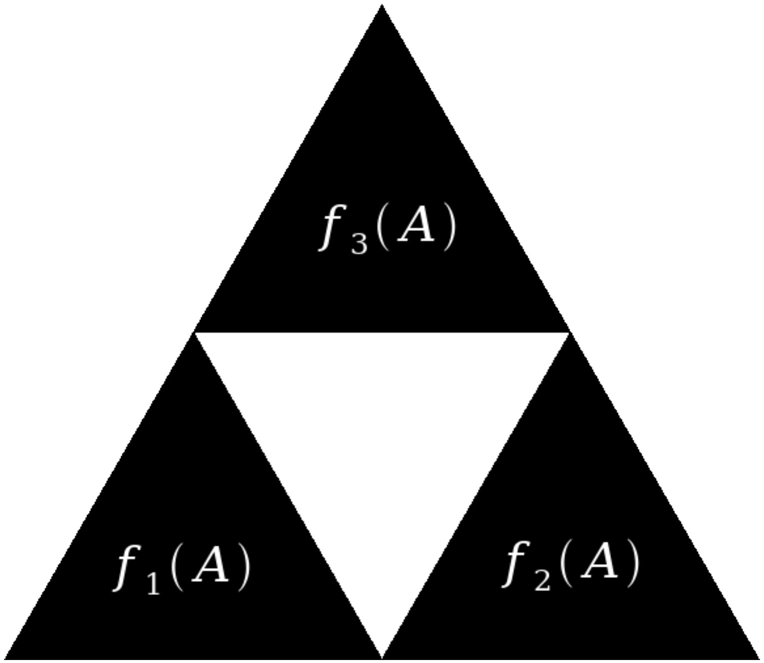
$$\{\mathbb{R}^2; f_1, f_2, f_3\}\ mit$$

$$f_1(x,y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right);$$

$$f_2(x,y) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}, \frac{y}{2}\right);$$

$$f_3(x,y) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}, \frac{y}{2} + \frac{1}{2}\right)$$





Mathematik eines IFS

- Was ist ein Fraktal?
- Definition eines IFS
- Eigenschaften
- Erzeugung eines IFS

Was ist ein Fraktal

- lat. *fractus*: gebrochen
- bezeichnet natürliche, künstliche Gebilde oder geometrische Muster
- meist durch rekursive Vorschrift gebildet
- gekennzeichnet durch Selbstähnlichkeit
- „Objekt besteht aus verkleinerten Kopien seiner selbst“

Definition

$$\text{Eine Menge } \boldsymbol{F} \text{ von Funktionen } f_i, i \in \mathbb{N} \text{ heißt}$$

$$\text{iteriertes Funktionensystem}$$

$$\text{wenn gilt :}$$

$$f_i : M \rightarrow M \quad \forall i \, (\text{gleicher Def.} - / \text{Bildbereich})$$

$$\text{und}$$

$$\boldsymbol{F} \circ \boldsymbol{F} \subseteq \boldsymbol{F} \quad \text{d.h.} \quad \forall f_i, f_j \in \boldsymbol{F} : \; f_i \circ f_j \in \boldsymbol{F}$$

Eigenschaften I

Das IFS F muss endlich erzeugt sein

d.h. F *besteht aus endlich vielen Funktionen aus denen Weitere durch Iteration (wiederholte Komposition) gebildet werden.*

Eigenschaften II

$$Die\, Menge\, M\, ist\, ein\, vollständig\, metrischer\, Raum\, mit\, Metrik\, d$$

$$d.h.\ je\, 2\, Elementen\, x\,,\, y \in M\, kann\, eine\, positive\, reelle\, Zahl\, zugeordnet\, werden\, welche\, als\, deren\, Abstand\, interpretiert\, werden\, kann.$$

$$d: MxM \rightarrow \mathbb{R}^{+}$$

Eigenschaften III

$$\forall f \in F: \quad f \text{ ist kontraktiv}$$

(M, d) *ist metrischer Raum. Eine Ab-bildung* $f: M \rightarrow M$ *heißt kontraktiv auf* M *wenn gilt:*

$$\exists \lambda < 1: \forall x, y \in M:$$
$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda * d(x, y)$$

Folgerung

Unter diesen Umständen gibt es eine

invariante, sebstähnliche

Menge $X \subseteq M$

Invarianz von X

Die Teilmenge $X \subseteq M$ *ist*

invariant

wenn sie von jeder Funktion des IFS wieder in sich abgebildet wird.

Selbstähnlichkeit von X

$Die\ Teilmenge\ X \subseteq M\ ist$

$selbstähnlich$

$wenn\ jedes\ \ x \in X\ \ in\ der\ Bildmenge$
$F(X)\ einer\ Funktion\ \ f \in \mathbf{F}\ \ ist.$

Erzeugung eines IFS

$$\mathcal{F}_1 := \left\{ f_1, \ldots, f_r : M \rightarrow M \right\}$$

$$Vorauss.: \forall f \in \mathcal{F}_1 : f \, kontraktiv$$

$$Fortsetzung \, durch \, Iteration$$

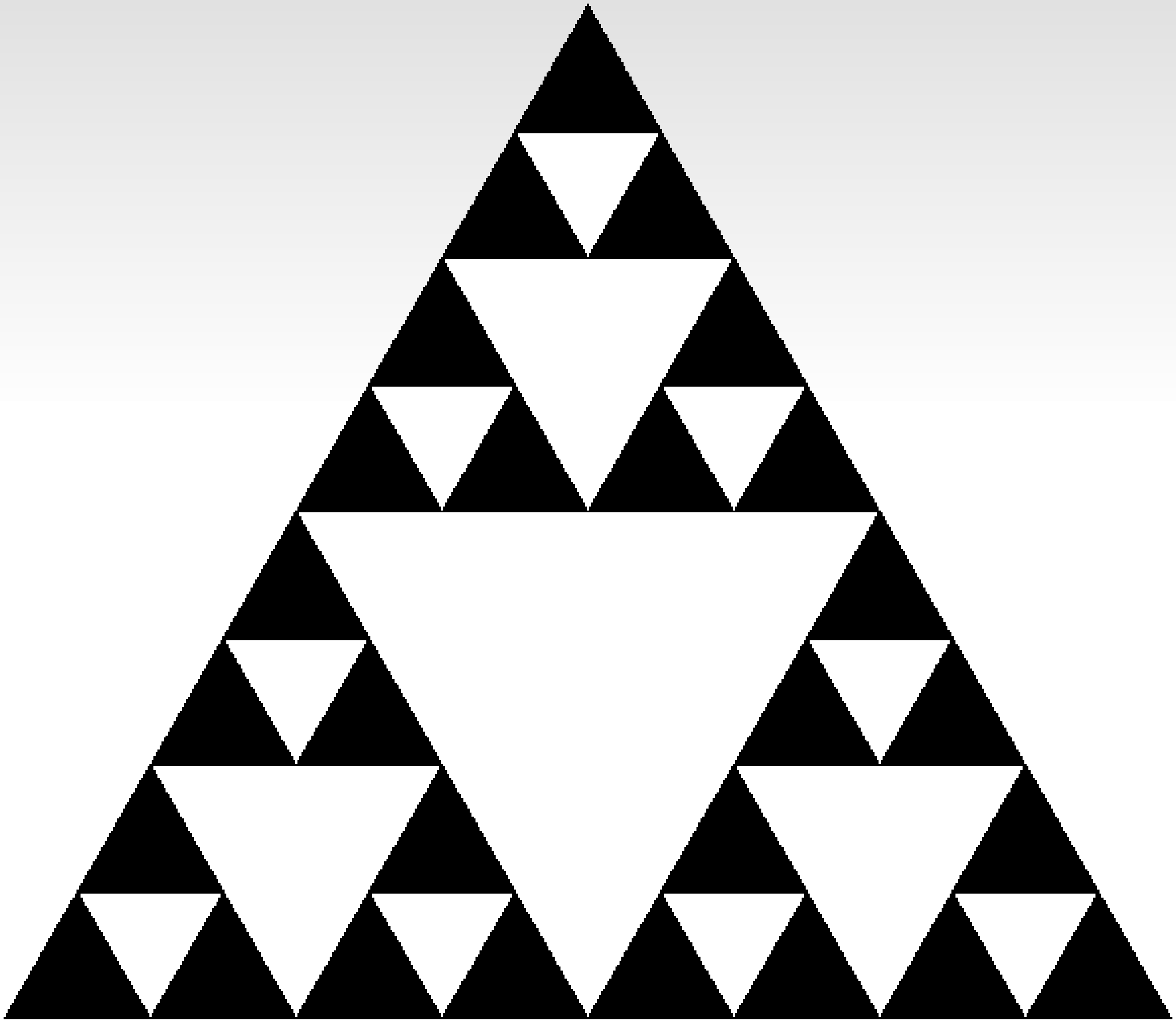
$$\mathcal{F}_{n+1} := \mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_n :=$$

$$\left\{ f \circ g : f \in \mathcal{F}_1, \; g \in \mathcal{F}_n \right\}$$

$$es \, ergibt \, sich$$

$$\mathcal{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$$

Veranschaulichung



Anwendungen

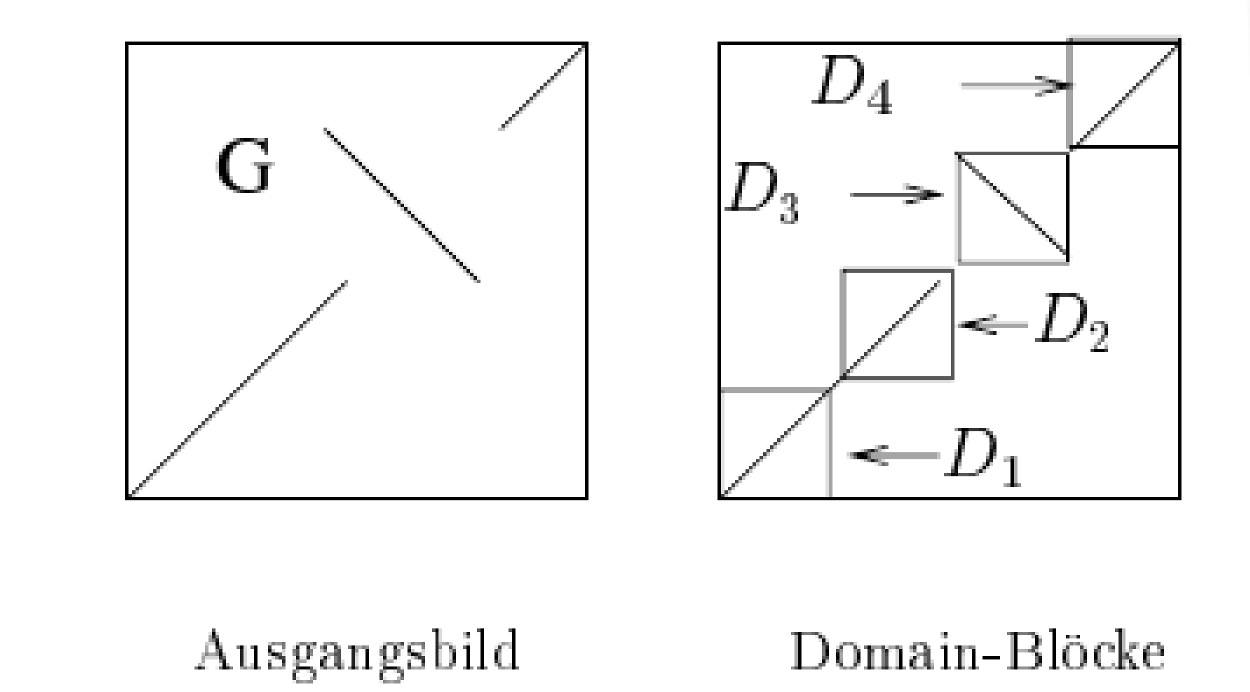
- Fraktale Kompression
- Grafisches Werkzeug

Fraktale Kompression

- Natur: Viele Strukturen mit starker Selbstähnlichkeit
- Umfamgreiche Gebilde durch kleine Erzeugersysteme
- Mitte der 80-Jahre:
  --> Idee der fraktalen Kompression
- Erste Implementierung: 1992

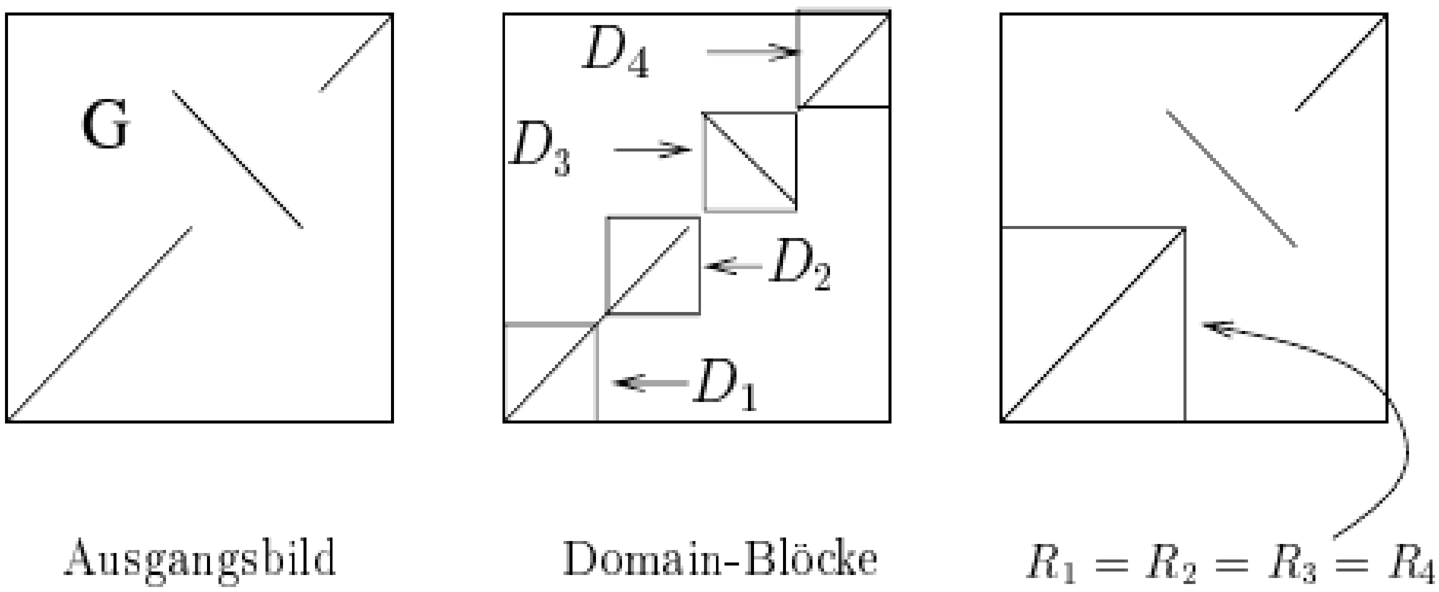
Fraktale Kompression

- Prinzip:
  - 1. Bild in Domainblöcke partitionieren



Fraktale Kompression

- Prinzip:
  - 2. Zu jedem Domain-Block wird ein Rangeblock gesucht [unter einer affinen Abbildung (Drehung, Skalierung, Translation) möglichst nahe am Domain-Block]

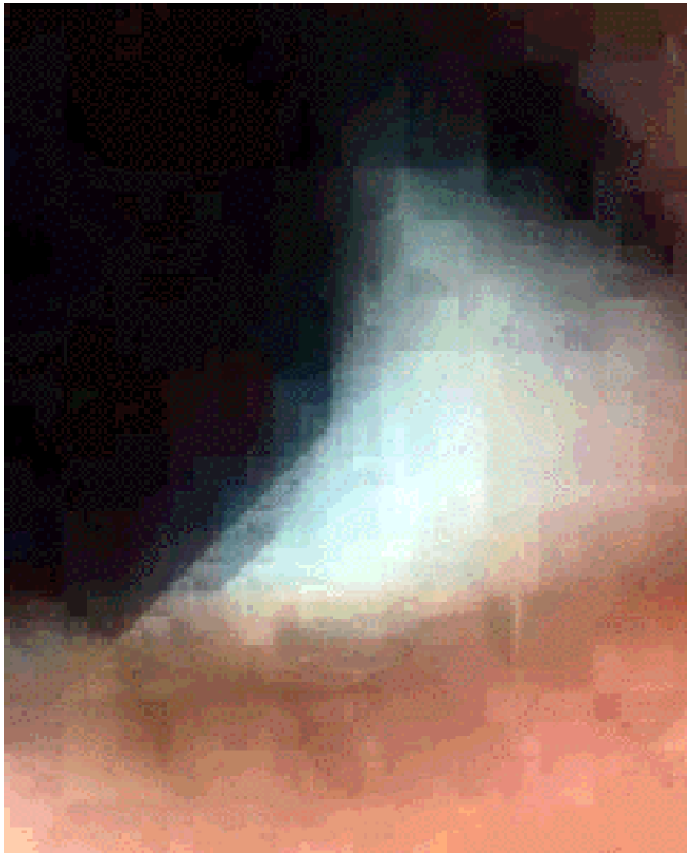


Fraktale Kompression

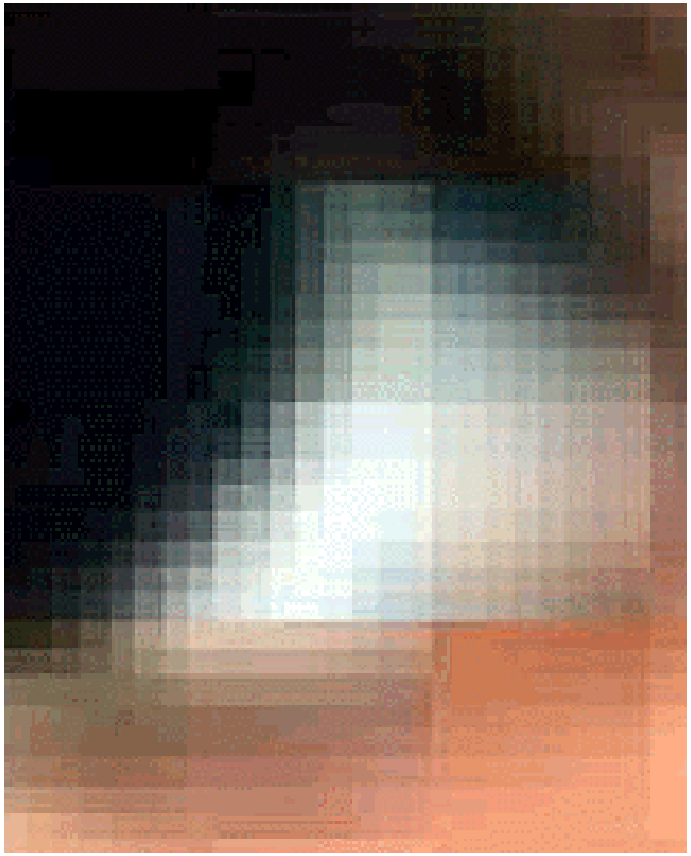
- Hauptaufgabe: Finden der richtigen Range-Blöcke
- Vereinfachung:
  - Feste Anzahl von Transformationen (affinen Abbildungen)
  - Feste Rangeblockgrößen (Eckpunkte eines 2-dim. Gitternetzes)

Fraktale Kompression

- Bsp: Fraktale Kompression vs. JPEG



Fraktal-Bild
Kompressionsrate 72:1



JPEG-Bild
Kompressionsrate 71:1

Fraktale Kompression

- Vorteile:
  - hohe Kompressionsraten
  - Auflösungsunabhängigkeit
  - --> Beliebiges Hineinzoomen
- Nachteil:
  - Komprimieraufwand deutlich höher als z.B. bei GIF oder JPEG

Fraktale Kompression

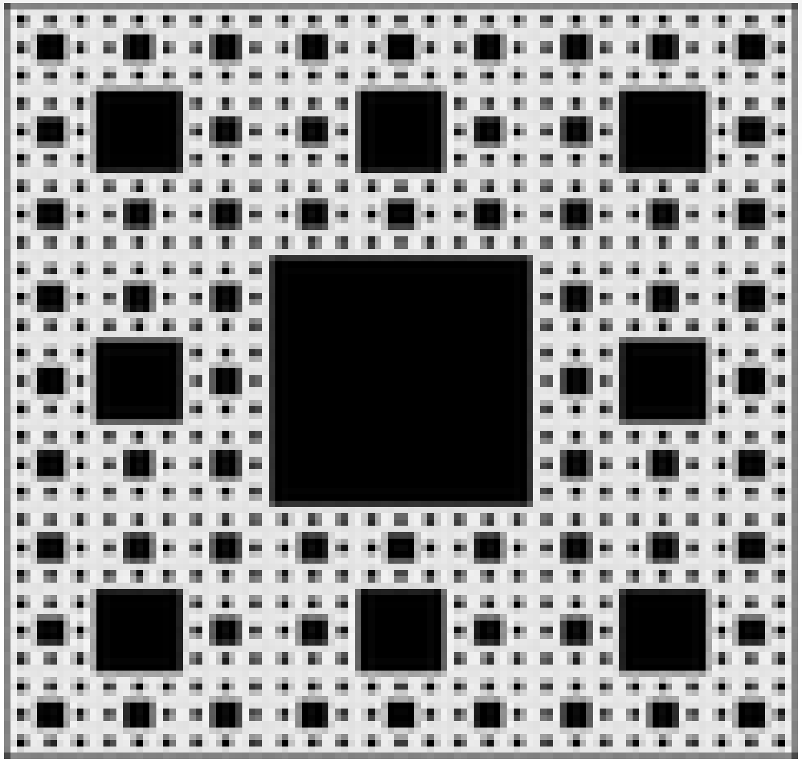
- Formate:
  - FIF (Fractal Image Format)
    - von Iterated Systems
    - Trotz Vorteile gescheitert (keine Browser-Implementierung)
  - FCI (Fractal Compressed Image)
    - Verfahren schneller als bei FIF
    - Aber nicht ganz so gute Kompressionsraten
    - Auch nicht durchgesetzt

Grafisches Werkzeug

- Als praktisches Werkzeug für Bilder der Natur
- Beispiel: Wolken, Landschaften, Pflanzen
- Vereinzelte Versuche in Video-Nachbearbeitungen

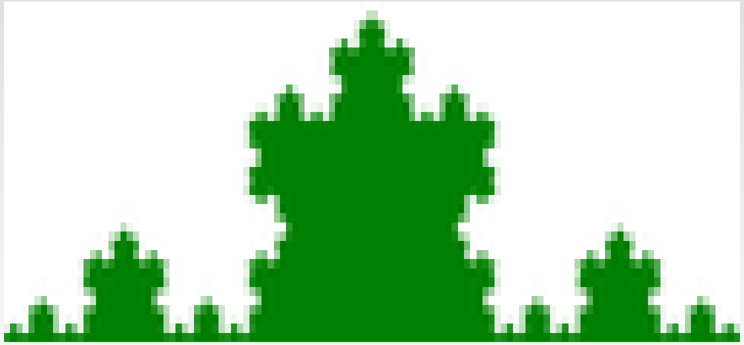
Weitere Beispiele

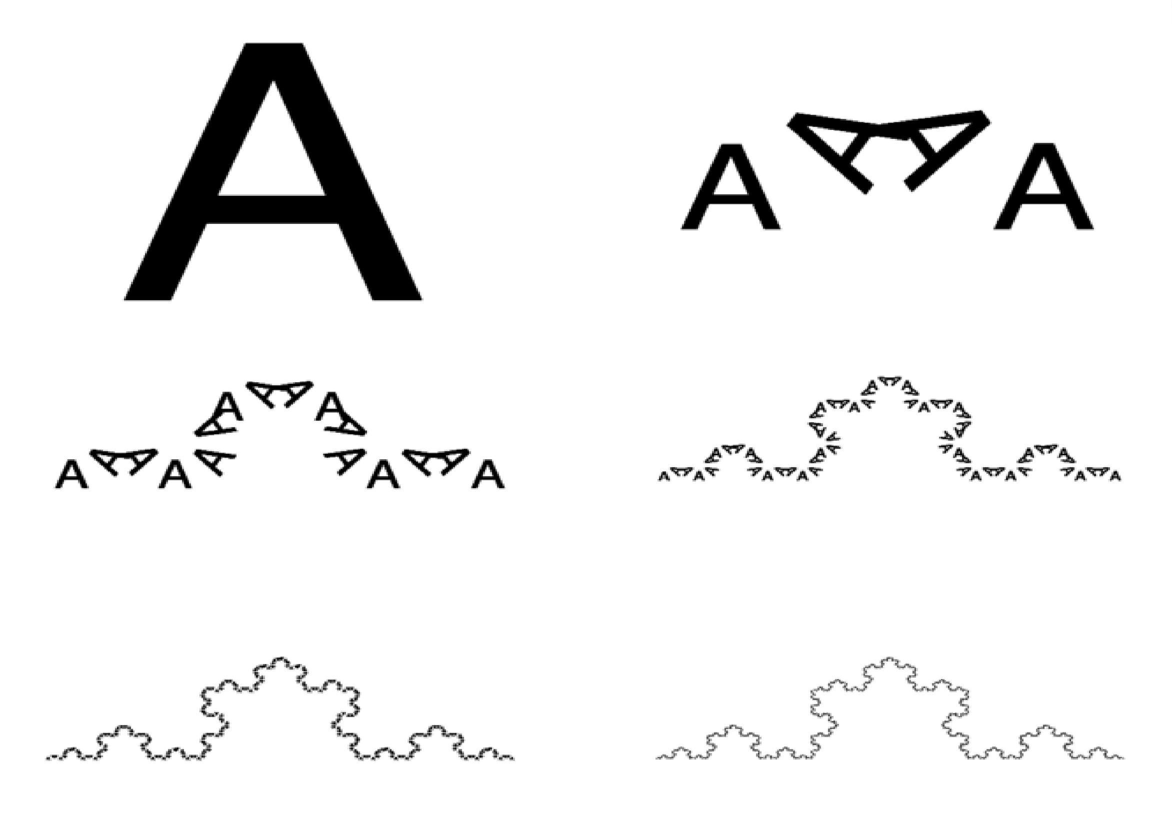
- Sierpinski-Teppich



Weitere Beispiele

- Koch-Kurve





Weitere Beispiele

- Farn

Literaturquellen

- Hermann Dietmar, Algorithmen für Chaos und Fraktale, Addison-Wesley, 1994
- www.ifp.uni-stuttgart.de/publications/dissertationen/Diss_Kiefner.pdf
- http://de.wikipedia.org/wiki/Iteriertes_Funktionensystem
- http://de.wikipedia.org/wiki/Fraktale_Bildkompression
- M. Oberguggenberger, A. Ostermann, Analysis für Informatiker, Springer, 2005

Bildquellen

- Applet „Das Sierpinski-Dreieck“ www.seefsen.de/sierp-html