Riemann Geometrie

Basis für die allgemeine Relativitätstheorie

Huber Stefan
Rathgeb Christian
Walkner Stefan

Universität Salzburg
Angewandte Informatik

10. Jänner 2005

Inhalt

Riemanns Leben

- Geburt und Kindheit
  - Geburt am 17. September 1826 in Breselenz (Niedersachsen)

Riemanns Leben

- Geburt und Kindheit
  - Geburt am 17. September 1826 in Breselenz (Niedersachsen)
- Schulzeit
  - 1842 Untersekunda (10. Klasse) Johanneum Lüneburg (Niedersachsen)

Riemanns Leben

- Studium
    - 1846 Studium in Göttingen
    - 1847 Studium in Berlin
    - 1849 Doktorarbeit in Göttingen (Veröffentlichung 1851)
    - 1854 Habilitation (enthält auch das Riemannsche Integral)

Riemanns Leben

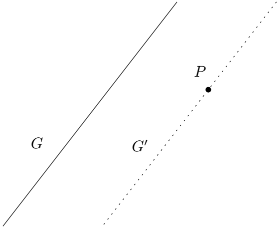
- Studium
  - 1846 Studium in Göttingen
  - 1847 Studium in Berlin
  - 1849 Doktorarbeit in Göttingen (Veröffentlichung 1851)
  - 1854 Habilitation (enthält auch das Riemannsche Integral)
- Lebensende
  - Erkrankung und Genesungsaufenthalte in Italien
  - 20. Juli 1866 am Lago Maggiore

Klassische Geometrie

- Euklidische Axiome von Euklid (300 v.Chr.)
  - Man kann eine gerade Strecke von einem Punkt zu einem anderen Punkt ziehen
  - Eine Gerade ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten
  - wesentliche Annahme der Euklidischen Geometrie: Parallelaxiom
    Für alle Geraden G und einen nicht auf dieser Gerade liegenden Punkt P gibt es genau eine Gerade G' die P beinhaltet und G nicht schneidet

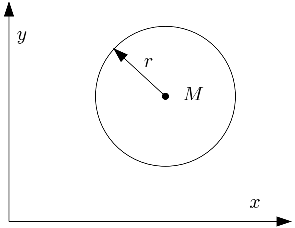
Klassische Geometrie

- Euklidische Axiome von Euklid (300 v.Chr.)
  - Man kann eine gerade Strecke von einem Punkt zu einem anderen Punkt ziehen
  - Eine Gerade ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten
  - wesentliche Annahme der Euklidischen Geometrie: Parallelaxiom
    Für alle Geraden G und einen nicht auf dieser Gerade liegenden Punkt P gibt es genau eine Gerade G' die P beinhaltet und G nicht schneidet



Analytische Geometrie

- Verbindung zwischen Geometrie und Algebra
- algebraische Darstellung geometrischer Figuren
- Beispiel:
  Kreisgleichung im $R2$:
  $(x_p - x_m)^2 + (y_p - y_m)^2 = r^2$



Nichteuklidische Geometrie

Neue Systeme durch die Arbeit mit Euklids Paralellaxiom

Nichteuklidische Geometrie

Neue Systeme durch die Arbeit mit Euklids Paralellaxiom
Beispiel: *Oberfläche einer Kugel*

- Klassische Geometrie lässt sich betreiben
- Gerade wird zu Längenkreis
- Alle Axiome gelten außer das Paralellaxiom!

Der Winkelsummensatz

Die Winkelsumme eines Dreiecks ist gleich der Summe zweier rechter Winkel

Folgerung

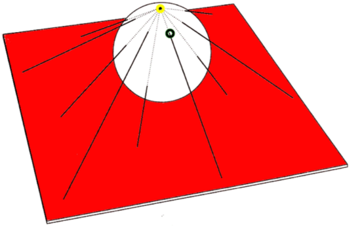
Gauß und Riemann konnten beweisen: Axiome sind widerspruchsfrei, falls

- Winkelsumme $> 180^o$
- Krümmungsmaß $k > 0$

Riemann'sche Zahlenkugel

- Kugel wird auf Ebene "gelegt"
- $\Rightarrow$ Paralellaxiom gilt hier nicht

$$\frac{1}{k} = \text{Radius der Kugel}$$

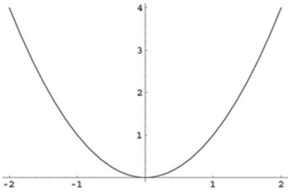


Zusammenfassung

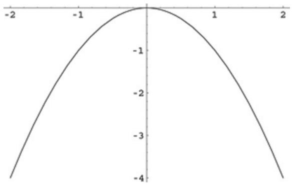
	Euklid	Riemann
Krümmungsmaß k	0	> 0
Paralelle "Geraden"	1	0
Dreieckswinkelsumme	180^o	$> 180^o$
Paralelle "Ebenen"	1	0

Krümmung

Krümmung von Funktionen



(a) Links gekrümmt



(b) Rechts gekrümmt

Riemann'scher Krümmungstensor

- Berechnung durch Differenzialgeometrie
- Beschreibt Krümmung der Raumzeit

Raumzeit

- Raum und Zeit zu einem einheitlichen 4-dimensionalen Gebilde verschmolzen
- Ein Punkt wird zu einem 4-dimensionalen Vektor.

$$\text{Ereignis } p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2}$$

Spezielle Relativitätstheorie

- 1905 von A. Einstein veröffentlicht

Spezielle Relativitätstheorie

- 1905 von A. Einstein veröffentlicht
- Inertialsystem:
  Ein kräftefreies in der Raumzeit lokalisiertes System

Spezielle Relativitätstheorie

- 1905 von A. Einstein veröffentlicht
- Inertialsystem:
  Ein kräftefreies in der Raumzeit lokalisiertes System
- Relativitätsprinzip:
  In allen Inertialsystemen werden die Naturgesetze durch die selben Gleichungen beschrieben

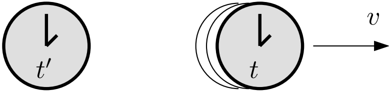
Spezielle Relativitätstheorie

- 1905 von A. Einstein veröffentlicht
- Inertialsystem:
  Ein kräftefreies in der Raumzeit lokalisiertes System
- Relativitätsprinzip:
  In allen Inertialsystemen werden die Naturgesetze durch die selben Gleichungen beschrieben
- Konstanz der Lichtgeschwindigkeit:
  Die Lichtgeschwindigkeit ist in allen Inertialsystemen gleich $c \approx 299.792 \frac{km}{s}$

Folgerungen

- Zeit, Raum und Masse eines anderen Inertialsystems hängen von dessen Relativgeschwindigkeit ab:

$$t = t' \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad l = l' \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad m = m' \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$



- Energie ist äquivalent zu Masse:

$$E = mc^2$$

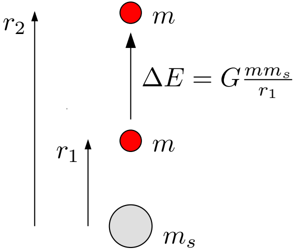
Allgemeine Relativitätstheorie

- 1915 von A. Einstein veröffentlicht
- Gravitationsfelder beeinflussen Uhren und Maßstäbe

Allgemeine Relativitätstheorie

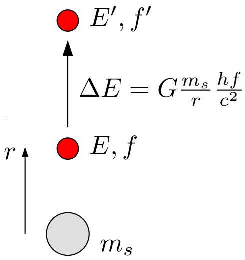
- 1915 von A. Einstein veröffentlicht
- Gravitationsfelder beeinflussen Uhren und Maßstäbe
- Gedankenexperiment:
  - Ein Photon p entfernt sich von einer Masse m_s
  - Das Photon p befindet sich im Gravitationsfeld der Masse m_s
  - Es verliert an Energie und somit an Frequenz

Entfernen von einer Masse



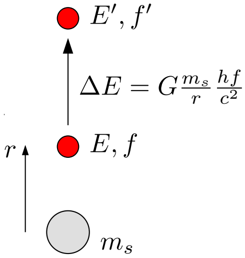
- Die Masse m entfernt sich von einer Masse m_s vom Abstand r_1 zum Abstand r_2
- Die Energie die aufgewendet wird: $\Delta E = G\frac{mm_s}{r_1} - G\frac{mm_s}{r_2}$
- Für $r_2 \gg r_1 \quad \Rightarrow \quad \Delta E = G\frac{mm_s}{r_1}$

Gedankenexperiment



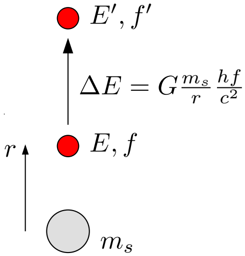
- $E = mc^2 = hf \Rightarrow m = \frac{E}{c^2} = \frac{hf}{c^2}$

Gedankenexperiment



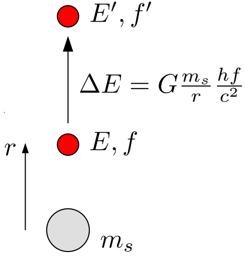
- $E = mc^2 = hf \Rightarrow m = \frac{E}{c^2} = \frac{hf}{c^2}$
- $\Delta E = G\frac{mm_s}{r} = G\frac{m_s}{r}\frac{hf}{c^2}$

Gedankenexperiment



- $E = mc^2 = hf \Rightarrow m = \frac{E}{c^2} = \frac{hf}{c^2}$
- $\Delta E = G\frac{mm_s}{r} = G\frac{m_s}{r}\frac{hf}{c^2}$
- $E' = hf' = hf - \Delta E = hf - G\frac{m_s}{r}\frac{hf}{c^2} = hf\left(1 - G\frac{m_s}{rc^2}\right)$

Gedankenexperiment



- $E = mc^2 = hf \Rightarrow m = \frac{E}{c^2} = \frac{hf}{c^2}$
- $\Delta E = G\frac{mm_s}{r} = G\frac{m_s}{r}\frac{hf}{c^2}$
- $E' = hf' = hf - \Delta E = hf - G\frac{m_s}{r}\frac{hf}{c^2} = hf\left(1 - G\frac{m_s}{rc^2}\right)$
- $f' = f\left(1 - G\frac{m_s}{rc^2}\right)$

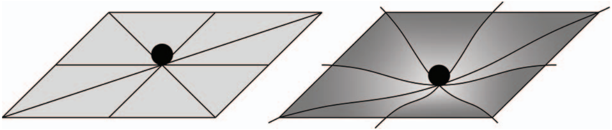
Deutung des Experiments

- $f' = f\left(1 - G\frac{m_s}{rc^2}\right)$
- Die Frequenz f' sinkt mit der Entfernung von m_s.
- Die allgemeine Relativitätstheorie besagt weiters:

$$t = t'\frac{1}{1 - G\frac{m_s}{rc^2}} \qquad l = l'\frac{1}{1 - G\frac{m_s}{rc^2}}$$

Geometrische Deutung

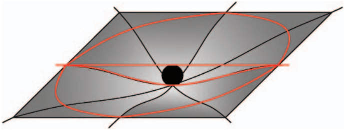
- $l = l' \frac{1}{1 - G\frac{m_s}{rc^2}}$
- Mit sinkendem r steigt $l \Rightarrow$ Der Raum dehnt sich in der Nähe von m_s



- Keine euklidische Geometrie
- Riemann gewinnt an Bedeutung in der Physik

Folgen

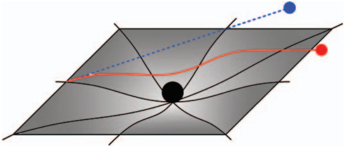
- Eine Geometer mißt Umfang u und Durchmesser d eines Kreises
- In der euklidischen Geometrie gilt: $u = \pi d$.
- Im gekrümmten Raum nicht



- $\pi_{Euklid} = 3,141592.653...$ $\pi_{Sonne} = 3,141592.248...$

Folgen

- Das Gravitationsfeld lenkt Lichtbahnen ab
- Planten erscheinen an Positionen, wo sie nicht sind



- Lichtstrahlen in Sonnennähe werden um $1,75''$ abgelenkt

Danksagung

Wir danken für die Aufmerksamkeit.