PS Diskrete Mathematik: Aufgabenblatt 1 (2019-03-15)

Aufgabe 1 Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für welche die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$(x^3 - x) \cdot (x^2 + x - 6) \cdot (2x^2 - 5x - 3) = 0$$

Aufgabe 2 Bestimmen Sie alle $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, für welche das folgende lineare Gleichungssystem erfüllt ist:

$$\begin{aligned} 1 &= a + b + c + d \\ -1 &= a + 2b + 3c + 4d + 5e \\ 0 &= a - 2c \\ -3 &= b + c + d \\ -1 &= -b + 2d \end{aligned}$$

Aufgabe 3 Vereinfachen Sie die folgenden Terme:

$$\frac{2^{n+1}}{2^n} \qquad \log_2 4 \cdot \frac{8^n}{2^{n+1}} \qquad \frac{7^{3\log_7 n}}{n} \qquad \frac{\log^2(n \cdot m) - \log^2 m - \log n^2 \log m}{\log n} \qquad \frac{(4 \cdot 2^n)^2}{\log_{13}(13^4)}$$

Aufgabe 4 Für $X := \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ und $Y := \{6, 7, 8, 9, 10\}$ betrachten wir das Gitternetz $X \times Y$. Geben Sie alle Elemente dieses Gitternetzes (explizit) an, deren Abstand von $(8, 9)$ höchstens $\sqrt{5}$ beträgt. (Wie üblich, definieren wir für $i, m \in X$ und $j, n \in Y$ den Abstand zwischen (i, j) und (m, n) als $\sqrt{(i-m)^2 + (j-n)^2}$.)

Aufgabe 5 Warum sind die folgenden Sätze der Umgangssprache problematisch?

1. Der Gewinner erhält ein wertvolles Geschenk und eine Fernreise oder einen Geldpreis.
2. Bei rotem und gelbem Licht hier halten.
3. Die Negationen der Aussage *Alle Menschen sind sterblich*:
   - Kein Mensch ist sterblich.
   - Alle Menschen sind unsterblich.

Aufgabe 6 Wir betrachten drei färbige Holzblöcke — je einfärbig, markiert mit den Farben R, G, B — welche in der Reihenfolge RGB angeordnet seien. Auf diesem Tripel von Holzblöcken definieren wir
⋆ die Aktion a als „vertausche ersten und zweiten Block“, also $RGB \to GRB$ bei Anwendung auf die Ausgangsreihenfolge,
⋆ die Aktion b als „vertausche zweiten und dritten Block“, also $RGB \to RBG$ bei Anwendung auf die Ausgangsreihenfolge, und
⋆ die Aktion e als „ändere die Reihenfolge nicht“, also $RGB \to RGB$ bei Anwendung auf die Ausgangsreihenfolge.
Die Aktion ab definieren wir als Hintereinanderausführung von b gefolgt von a, also als $RGB \to BRG$. Analog für die Aktionen ba und aba. Damit erhalten wir eine Menge $\mathcal{A}$ von sechs Aktionen, die auf die Holzblöcke allein oder in beliebiger Reihenfolge angewandt werden können. Zeigen Sie, daß $\mathcal{A}$ mit der Hintereinanderausführung als Operation eine Gruppe bildet. (Die Assoziativität darf ohne Beweis angenommen werden.) Ergibt sich sogar eine Abelsche Gruppe?

Aufgabe 7 Wir wissen, dass für aussagenlogischen Formeln, welche ausschließlich Konjunktion oder ausschließlich Disjunktion als Junktoren enthalten, das Assoziativgesetz gilt. Gilt dies auch für Formeln, welche ausschließlich Implikation oder ausschließlich Äquivalenz als Junktoren enthalten? Überlegen Sie sich dies anhand von $a \Rightarrow b \Rightarrow a$ und $a \Leftrightarrow b \Leftrightarrow c$ für aussagenlogische Variable a, b, c.

Aufgabe 8 Formulieren Sie Aussage „Es gibt genau eine Katze in diesem Raum“ mittels Prädikatenlogik, sodass ausschließlich die Quantoren $\forall$ und $\exists$ verwendet werden. Verneinen Sie weiters die sich ergebende Aussage und formen Sie sie äquivalent so um, dass kein Negationszeichen vor einem Quantor oder einen Klammerausdruck steht. (Alle Negationszeichen sollen also ganz innen in der Formel stehen.)

PS Diskrete Mathematik: Aufgabenblatt 2 (2019-03-22)

Aufgabe 9 Betrachten Sie folgende Definitionen:

a) $O(x) :\Leftrightarrow x$ ist ungerade.

b) $E(x) :\Leftrightarrow \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls } x = 0, \\ \neg E(x-1) & \text{falls } x > 0. \end{cases}$

c) $B(n, m) :\Leftrightarrow (O(n) \Leftrightarrow E(m))$

Handelt es sich bei diesen um explizite oder um rekursive Definitionen? Sind diese Definitionen so schon exakt oder gibt es Verbesserungsmöglichkeiten? Beschreiben Sie in Worten, was das Prädikat B aussagt.

Aufgabe 10 Für $n \in \mathbb{N}$:

a) $T(n) := \begin{cases} n/2 & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 3n+1/2 & \text{sonst.} \end{cases}$

b) $Z(n) := \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1, \\ Z(T(n)) + 1 & \text{sonst.} \end{cases}$

Bestimmen Sie $T(n)$ für alle $n \leqslant 8$ und $Z(n)$ für alle $n \leqslant 4$. Sind diese Definitionen rekursiv oder explizit? Sind sie unproblematisch oder nicht? Inwiefern?

Aufgabe 11 Sie wollen einen Rechnerverbund bauen, in dem jeder Rechner mit jedem anderen über eine dedizierte Leitung verbunden ist. Sei $L(n)$ die Anzahl der notwendigen Leitungen bei n Rechnern. Wie ändert sich $L(n)$ wenn sie statt n Rechnern einen mehr haben? Geben Sie eine rekursive Formel für $L(n)$ an und vergessen Sie nicht auf den Basisfall.

Aufgabe 12 Sie haben ein $1 \times n$ großes Feld und ausreichend viele Steine der Größen 1×1 und 1×3 mit denen Sie das Feld abdecken wollen. Wir suchen eine rekursive Formel für die Anzahl der Möglichkeiten $M(n)$ um ein $1 \times n$ großes Feld abzudecken. Überlegen Sie sich, wie viele Varianten es für kleine Felder gibt und versuchen Sie dann eine Formel für $M(n)$ zu finden, die auf Werte von M für kleinere n zurückgreift. Was sind Ihre Basisfälle? Was ist $M(6)$?

Aufgabe 13 Zeigen Sie: $\forall r \in \mathbb{R}$: Das Polynom $2x^2 + (2r-3)x - 3r$ hat reelle Nullstellen in x.

Aufgabe 14 Seien x, y, z aussagenlogischen Variablen. Zeigen Sie:
$(x \wedge y \wedge z) \vee (\neg x \vee \neg(y \wedge z))$.

Aufgabe 15 Sei L eine Menge von aussagenlogischen Variablen. Mit $a, b, c \in L$, zeigen Sie:
$(a \Rightarrow (\neg b \vee c)) \Rightarrow (\forall x \in L : ((a \wedge b) \Rightarrow (x \vee c)))$.

PS Diskrete Mathematik: Aufgabenblatt 3 (2019-03-29)

Aufgabe 16 Zeigen Sie dass

$$\frac{n^2(n+1)}{2} \geqslant \max\{2n^2, \frac{3}{2}n^2 + n\}$$

für jede natürliche Zahl n mit $n \geqslant 3$.

Aufgabe 17 Betrachten Sie den folgenden Beweis und erklären Sie entweder warum man "o.B.d.A" $k \geqslant 0$ annehmen kann, oder erklären Sie wo der Fehler ist.

Eigenschaft: Für alle ganze Zahlen k gilt $k^2 + k \geqslant 0$.
Beweis: Sei $k \in \mathbb{Z}$ beliebig. O.B.d.A. können wir annehmen dass $k \geqslant 0$. Nachdem $k^2 \geqslant 0$, bekommen wir $k^2 + k \geqslant 0$. ∎

Aufgabe 18 Führen Sie einen indirekten Beweis, um die Ungleichung vom geometrischen und arithmetischen Mittel für beliebige $a, b \in \mathbb{R}^+$ zu beweisen:

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

Aufgabe 19 Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein deterministischer endlicher Automat mit n Zuständen für $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die folgende Eigenschaft: Falls es ein Wort $w \in L(M)$ mit $|w| \geqslant n$ gibt, dann ist $L(M)$ unendlich.

PS Diskrete Mathematik: Aufgabenblatt 4 (2019-04-05)

Aufgabe 20 Schreiben Sie vier aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen auf. Nun subtrahieren Sie das Quadrat der zweiten vom Quadrat der dritten Zahl. Weiters ermitteln Sie das Produkt der ersten mit der vierten Zahl. Was ergibt sich, wenn Sie sich nicht verrechnen? Was ergibt sich, wenn sie vier andere aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen betrachten und die gleichen Rechenschritte durchführen? Leiten Sie daraus eine Vermutung ab und beweisen Sie Ihre Vermutung.

Aufgabe 21 Beweisen Sie mittels Schubfachschluß: Aus einer Menge S von 10 höchstens zweistelligen Zahlen lassen immer zwei (nicht-leere) disjunkte Teilmengen S_1 und S_2 auswählen, sodass die Summe der Zahlen in S_1 gleich der Summe der Zahlen in S_2 ist. (Hinweis: Ermitteln Sie eine obere Schranke für den größtmöglichen Zahlenwert dieser Summen und verwenden Sie dann die verschiedenen Summen als Schubfächer.)

Aufgabe 22 Ermitteln Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichung über $\mathbb{R}$. (Hinweis: Eine Fallunterscheidung ist hilfreich.)

$$|2x - 8| + 2x = |x^2 - 4|$$

Aufgabe 23 Wir nennen eine Zahl $k \in \mathbb{N}_0$ eine Quadratzahl falls es eine Zahl $m \in \mathbb{N}_0$ mit $m^2 = k$ gibt. Beweisen Sie: Jedes $n \in \mathbb{N}$, welches ungerade ist, lässt sich als Differenz zweier verschiedener Quadratzahlen aus $\mathbb{N}_0$ darstellen. (Hinweis: Ein konstruktiver Beweis ist einfach, aber Sie müssen dies nicht notwendigerweise konstruktiv beweisen. Um eine Idee zur Konstruktion der gesuchten Zahlen zu bekommen, könnte man sich die Aufgabe für kleine Werte von n ansehen.)

Aufgabe 24 Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert als $f(x) := x^2 - 5x + 6$. Beweisen Sie durch Kontraposition: Falls $x < 0$ dann $f(x) \neq 0$.

Aufgabe 25 In der VO haben wir für alle $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$ mittels Induktion bewiesen. Ihre Aufgabe ist es nun, unter Anwendung des Wohlordnungsprinzips einen Widerspruchsbeweis dieser Aussage zu führen. (Hinweis: Betrachten Sie im Beweis dazu die Menge aller natürlichen Zahlen, für welche diese Aussage gemäß Annahme falsch ist.)

Aufgabe 26 Für $n, m \in \mathbb{N}$ sagen wir, dass n ein echtes Vielfaches von m ist, falls es ein $k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ gibt, sodass $n = k \cdot m$. Beweisen Sie mittels Induktion: Für alle $x, n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ ist $x^n - 1$ stets ein echtes Vielfaches von $x - 1$.

PS Diskrete Mathematik: Aufgabenblatt 5 (2019-04-12)

Aufgabe 27 Stellen Sie die Zahl $(2019)_{10}$ zur Basis 7 dar.

Aufgabe 28 Zeigen Sie, dass es sich mit $m \in \mathbb{N}$ bei $\equiv_m$ tatsächlich um eine Äquivalenzrelation handelt.

Aufgabe 29 Zeigen Sie, dass 2019 kein Gegenbeispiel zur Goldbach'schen Vermutung ist. Wenn nötig können Sie dies rechnergestützt machen, müssen jedoch Ihre Vorgangsweise sehr gut beschreiben können.

Aufgabe 30 Sei F die Menge $\{\text{rot}, \text{grün}, \text{blau}\}$. Wir konstruieren $M := F \times \mathbb{Z}$.
Bestimmen und beweisen Sie die Kardinalität von M.

Aufgabe 31 Zeigen Sie Lemma 31.2, 31.3 und 31.4:
31.2 $\forall a \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} : \forall b \in \mathbb{Z} \colon a \mid b \Rightarrow (\forall c \in \mathbb{Z} \colon a \mid bc)$.
31.3 $\forall a, b \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} : \forall c \in \mathbb{Z} \colon (a \mid b \ \wedge \ b \mid c) \Rightarrow a \mid c$.
31.4 $\forall a \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} : \forall b, c \in \mathbb{Z} \colon (a \mid b \ \wedge \ a \mid c) \Rightarrow (\forall s, t \in \mathbb{Z} \colon a \mid (bs + ct))$.

Aufgabe 32 Wir wählen 5 zufällige Punkte in der Ebene mit ganzzahligen Koordinaten und betrachten die 10 Verbindungsstrecken zwischen diesen Punkten.

a) Beweisen Sie, dass der Mittelpunkt von einer dieser Verbindungsstrecken wieder ganzzahlige Koordinaten hat.
b) Zeigen Sie, dass dies bei nur 4 Punkten nicht zwingend gilt.
c) Wieviele Punkte braucht man, damit diese Eigenschaft auch im Raum gilt?

Aufgabe 33 Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für $\chi \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} \chi^i = \frac{1 - \chi^{n+1}}{1 - \chi}.$$

PS Diskrete Mathematik: Aufgabenblatt 6 (2019-05-03)

Aufgabe 34 (a) Seien p und q zwei verschiedene Primzahlen und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie dass

$$p|n \wedge q|n \Rightarrow pq|n.$$

Gilt das ohne die Voraussetzung dass p und q prim sind?

(b) Mit hilfe von der Eigenschaft (a), zeigen Sie dass $6|n \Leftrightarrow 2|n \wedge 3|n$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 35 Bestimmen Sie das multiplikative Inverse oder zeigen Sie dass es nicht existiert:

(a) von 11 in $\mathbb{Z}_{19}$;

(b) von 5 in $\mathbb{Z}_{10}$.

Aufgabe 36 Lösen Sie die Diophantische Gleichung

(a) $12x + 36y = 10$;

(b) $22x + 30y = 4$.

Aufgabe 37 Finden Sie ein $x \in \mathbb{Z}_7$ so dass:

(a) $11^{66} + 66^{11} \equiv_7 x$;

(b) $111^{666} + 666^{111} \equiv_7 x$;

PS Diskrete Mathematik: Aufgabenblatt 7 (2019-05-10)

Aufgabe 38 Beweisen Sie, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 3$ stets eine Primzahl p, sodass $n < p < n!$. (Hinweis: Betrachten Sie $n! - 1$.)

Aufgabe 39 Beweisen Sie: Für jede Zahl $n \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$ und $k := (n+1)! + 1$ sind die n Zahlen $k+1, k+2, \ldots, k+n$ alle nicht prim.

Aufgabe 40 Beweisen Sie: Wählt man beliebig zwölf paarweise verschiedene zweistellige Zahlen, so gibt es stets zumindest zwei unter ihnen, deren Differenz eine zweistellige Zahl $k \in \mathbb{Z}$ ergibt, sodass beide Ziffern von k gleich sind.

Aufgabe 41 Seien $a, b, q \in \mathbb{N}$ und $r \in \mathbb{N}_0$ so, dass $a = bq + r$. Beweisen Sie, dass dann $\gcd(a, b) = \gcd(b, r)$.

Aufgabe 42 Die Spalte "a mod b" beim Rechenbeispiel zum Erweiterten Euklidischen Algorithmus (Dia 129 der VO) suggeriert, dass der größte gemeinsame Teiler von a und b immer die Einträge in der Spalte $a \mod b$ teilt. Stimmt dies tatsächlich für alle $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a > b$?

Aufgabe 43 Beweisen Sie mittels wohlfundierter Induktion über $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$, daß für alle $i, j \in \mathbb{N}_0$ mit $i > j$ stets

$$\gcd(2^i - 1, 2^j - 1) = 2^{\gcd(i,j)} - 1$$

gilt. (Hinweis: Falls es Ihnen hilft, können Sie das Wissen aus Aufgabe 41 verwenden, auch wenn Sie Aufgabe 41 selbst nicht gelöst haben.)

Aufgabe 44 Für $k, n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir im Polynomring $\mathbb{R}[x]$ Polynome $b_{k,n}$ in der Variable x wie folgt:

$$b_{k,n}(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } k > n, \\ (1-x)^n & \text{falls } k = 0, \\ x \cdot b_{k-1,n-1}(x) + (1-x) \cdot b_{k,n-1}(x) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie mitels wohlfundierter Induktion, daß für alle $k, n \in \mathbb{N}_0$ und alle $x \in [0, 1]$ gilt: $b_{k,n}(x) \geqslant 0$. (Wir verwenden dabei die Konvention, daß $0^0 := 1$.)