Aufgabe 8:

$$\bigwedge_{\epsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \delta < \epsilon$$

ist eine Abkürzung für

$$\forall \epsilon (\epsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta (\delta > 0 \wedge \delta < \epsilon)).$$

Dies ist falsch in $\mathbb{Z}$, weil für $\epsilon := 1$ kein solches δ existiert, und wahr in $\mathbb{R}$, weil für jedes $\epsilon > 0$ die Zahl $\delta := \epsilon/2$ die Bedingungen erfüllt.

6.5.2021

Summe einer Folge $g(s, x) := s + a_{x'}$

Produkt zweier Zahlen
$h(y) = x \cdot y$ soll definiert werden.
$a = 0$
$g(p, y) := p + x$

Multiplikation mit primitiver Rekursion:
$x \cdot 0 = f(x)$ mit $f(x) = 0$.
$x \cdot y' = g(x \cdot y, x, y)$ mit $g(p, x, y) = p + x$.

$O = K_0^0$

12.5.2021

Blatt 3 Aufgabe 13

Sei $D := \mathbb{N}$ und sei $P(x, y) :\Leftrightarrow x < y$.
Dann ist P irreflexiv und transitiv. Außerdem gibt es zu jedem $x \in \mathbb{N}$ ein $y \in \mathbb{N}$ (z.B. die Zahl $x + 1$) mit $x < y$. Also ist die Aussage in der Aufgabe für $D := \mathbb{N}$ und für $P(x, y) :\Leftrightarrow x < y$ wahr. Durch dieses D und P ist also ein Modell dieser Aussage gegeben.

Mit einem endlichen Individuenbereich D geht es nicht. Denn da nach Voraussetzung alle Individuenbereiche nichtleer sind, gibt es ein $a_0 \in D$. Wir konstruieren uns eine Folge $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ von Elementen von D folgendermaßen. Für jedes $x \in D$ gibt es nach Voraussetzung ein $y \in D$ mit $P(x, y)$. Daher ist die Menge $\{y \in D \mid P(x, y)\}$ nicht leer. Nach dem Auswahlaxiom gibt es für die Menge aller dieser nichtleeren Mengen eine Auswahlfunktion f, d.h. es gilt $f(x) \in \{y \in D \mid P(x, y)\}$. Es gilt also $P(x, f(x))$ für alle $x \in D$. Wir definieren a_n durch vollständige Induktion nach n folgendermaßen.

- a_0 ist bereits gegeben.
- $a_{n+1} := f(a_n)$.

Also gilt $P(a_n, a_{n+1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt daher $P(a_n, a_{n+k})$ für alle $n, k \in \mathbb{N}$ mit $k > 0$. Beweis durch vollständige Induktion nach k. Also ist D unendlich.

- Induktionsanfang $k = 1$. Bereits bewiesen.
- Induktionsvoraussetzung (IV): Sei $P(a_n, a_{n+k})$.
- Induktionsbehauptung (IB): $P(a_n, a_{n+k+1})$.
- Beweis der IB. Nach oben bewiesenem gilt $P(a_{n+k}, a_{n+k+1})$. Wegen der Transitivität von P folgt die IB aus der IV und aus dieser Aussage.

Wegen der Irreflexivität von P ist also $a_n \neq a_{n+k}$ für alle $n, k \in \mathbb{N}$ mit $k > 0$. Folglich sind alle a_n voneinander verschieden. Daher ist D unendlich.

20.5.2021

Äquivalenzrelation:
$F \sim F$ (Reflexivität)
$F \sim G \Rightarrow G \sim F$ (Symmetrie)
$F \sim G \ \wedge \ G \sim H \Rightarrow F \sim H$ (Transitivität)

Konjunktive Normalform:
Beispiele $\neg P \wedge (P \vee Q) \wedge (R \vee \neg Q)$, $P \vee Q$, $P \wedge Q$, $\neg P$

27.5.2021

$$\frac{u \qquad v}{(u+v)}$$

9.6.2021

Definition: $\langle \textit{Definiendum} \rangle := \langle \textit{Definiens} \rangle$
Bei der induktiven Definition oder Rekursion kommt das Definiendum im Definiens vor.

16.6.2021

$$\begin{gathered}
p(1,0) = p(0,1) = 1+1 = 2 \\
p(1,1) = p(0, p(1,0)) = p(0,2) = 1+2 = 3 \\
p(1,2) = p(0, p(1,1)) = p(0,3) = 1+3 = 4 \\
\dots \\
p(1,y) = 2+y
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
p(2,0) = p(1,1) = 2+1 = 3 \\
p(2,1) = p(1, p(2,0)) = p(1,3) = 2+3 = 5 \\
p(2,2) = p(1, p(2,1)) = p(1,5) = 2+5 = 7 \\
\dots \\
p(2,y) = 3+2y
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
p(3,0) = p(2,1) = 3 + 2 \cdot 1 = 5 \\
p(3,1) = p(2, p(3,0)) = p(2,5) = 3 + 2 \cdot 5 = 13 \\
\dots \\
p(3,y) = -3 + 2^{3+y}
\end{gathered}$$

23.6.2021