Blatt 3

Aufgabe 2 Nach Voraussetzung gibt es eine bijektive Funktion $f : \{1, \ldots, n+1\} \to A$.

(a) Es ist $f(1) \in A$ und daher A nicht leer.

(b) Sei $x \in A$. Da f bijektiv ist, ist es insbesondere surjektiv. Also existiert ein $k \in \{1, \ldots, n+1\}$ mit $f(k) = x$. Definiere $g : \{1, \ldots, n\} \to A \setminus \{x\}$ wie folgt.

$$g(j) := \begin{cases} f(j) & \text{wenn } j < k \\ f(j+1) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist g bijektiv. Also ist $A \setminus \{x\}$ eine n-elementige Menge.

Aufgabe 3 A Menge von 6 Äpfeln $a_1, \ldots, a_6$, d.h. es gibt eine bijektive Funktion $f : \{1, \ldots, 6\} \to A$. Ein Apfel a_k wird entfernt. Es bleiben 5 Äpfel übrig, d.h. es gibt eine bijektive Funktion $g : \{1, \ldots, 5\} \to A \setminus \{a_k\}$. Nach der Definition von Aufgabe 2 ist g die Funktion $1 \mapsto a_1,\ \ldots, k-1 \mapsto a_{k-1},\ k \mapsto a_{k+1},\ \ldots,\ 5 \mapsto a_6$.

Aufgabe 4 $g(y) := f(y)$ für $y \in A \setminus \{x\}$.

Aufgabe 5 Aussageform $P[n]$, wobei n für eine natürliche Zahl steht:

> Für alle natürliche Zahlen m mit $m < n$ und für alle n-elementigen Mengen A und alle m-elementigen Mengen B gilt: Es gibt keine injektive Abbildung $f : A \to B$.

Induktionsanfang $n = 0$: $P[0]$ ist trivial, da es keine natürliche Zahl m mit $m < n$ gibt.

Induktionsvoraussetzung Es gelte $P[n]$.

Induktionsbehauptung Es gilt auch $P[n+1]$.

Beweis: Sei $m < n+1$, sei A eine $(n+1)$-elementige Menge und sei B eine m-elementige Menge. Angenommen, es gäbe eine injektive Abbildung $f : A \to B$. Nach Aufgabe 2a gäbe es dann ein $x \in A$ und nach Aufgabe 2b wäre $B \setminus \{f(x)\}$ eine $(m-1)$-elmentige Menge. Sei $g : A \setminus \{x\} \to B \setminus \{f(x)\}$ definiert durch $g(y) := f(y)$. Dann ist g injektiv im Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung.

Aufgabe 6

Blatt 4

Aufgabe 1 $\{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{2,3,4\}\}$
$\{\emptyset, \{(2,3)\}, \{(4,5)\}, \{(2,3),(4,5)\}\}$.

Aufgabe 2 Seien A, B, C Mengen.

(a) Sei $A = B$. Für jede Menge M sei FM die Aussage $\forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in M)$. Dann gilt FA. Nach dem zweiten Gleichheitsaxiom gilt $A = B \Rightarrow (FA \Rightarrow FB)$ und daher auch FB.

(b) Nach dem Paarmengenaxiom ist $\{A, A\}$, also $\{A\}$ eine Menge.

(c) Nach dem Paarmengenaxiom ist $\{A, B\}$ eine Menge. Daher ist nach dem Vereinigungsmengenaxiom $\bigcup\{A, B\}$ eine Menge. Es gilt

$$\bigcup\{A, B\} = \{x \mid \bigvee_{X\in\{A,B\}} x \in X\} = \{x \mid \bigvee_{X\in\{Y \mid Y=A\vee Y=B\}} x \in X\} = \{x \mid x \in A \vee x \in B\} = A \cup B$$

. Also ist $A \cup B$ eine Menge.

(d) Nach (b) ist $\{A\}$ eine Menge und nach dem Paarmengenaxiom ist $\{B, C\}$ eine Menge. Daher ist nach dem Paarmengenaxiom auch $\{\{A\}, \{B, C\}\}$ eine Menge und folglich nach dem Vereinigungsmengenaxiom auch $\bigcup\{\{A\}, \{B, C\}\}$, also $\{A, B, C\}$.

Aufgabe 3

(a) $\mathbb{N}$

(b) $\mathbb{Z}$

(c) $\mathbb{Q}$

(d) Der abgeschlossene Vollwürfel (Inneres+Rand).

(e) Rotationshyperboloid zur Rotation der Geraden h um die Gerade g.

Aufgabe 4 Die von diesem Erzeugungssystem erzeugte Menge (die Menge der herleitbaren Objekte) ist die Menge

$$A = \{3, 5, 6\} \cup \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \geq 8\}.$$

Denn man beweist durch vollständige Induktion nach n:
Wenn $(x_1, \ldots, x_n)$ eine Herleitung ist, dann gilt

$$x_1, \ldots, x_n \in A.$$

Andererseits sind 3, 5 und 6 herleitbar. Außerdem sind 8, 9 und 10 herleitbar und jede natürliche Zahl ≥ 8 lässt sich aus einer dieser drei Zahlen durch wiederholte Addition der Zahl 3 herleiten.

Aufgabe 5 Wörter über $\{a, b\}$, die

$\overline{L_1}$ mindestens ein b enthalten

$L_1 \cup L_2$ nur a's oder nur b's enthalten

$L_1 \cap L_2$ Das leere Wort ϵ

$L_1 \setminus L_2$ kein b enthalten und nicht leer sind

$L_1 L_2$ aus a's gefolgt von b's bestehen: $a^m b^n$

$\{a, b\}^*$ Alle

$\{ab\}^*$ $\epsilon, ab, abab, ababab, \ldots$, also alle $(ab)^n$

L_1^* nur aus a's bestehen, also alle a^n

L_1^+ nur aus a's bestehen, also alle a^n

Aufgabe 6 $(a|b)^* b(a|b)^*$

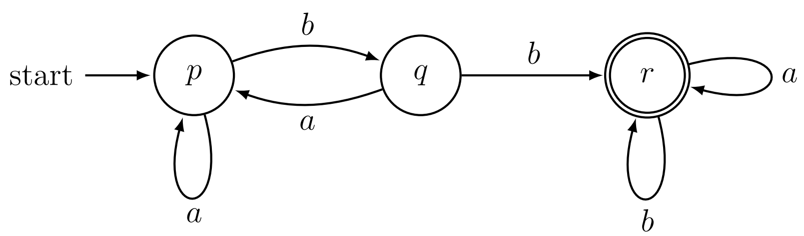
Aufgabe 7 $(\epsilon|b)(ab)^*(\epsilon|a)$

Aufgabe 8 Sei A ein regulärer Ausdruck für L und B ein regulärer Ausdruck für L'. Dann sind $(A|B)$, AB bzw. A^* reguläre Ausdrücke für diese Sprachen.

Aufgabe 9 Beweis durch vollständige Induktion nach n:
Wenn $n = 0$, dann ist $\bigcup \mathbb{L} = \emptyset$ und wird bezeichnet vom regulären Ausdruck O.
Nun sei $\bigcup \mathbb{L}$ regulär (Induktionsvoraussetzung) und L eine reguläre Sprache. Dann ist $\bigcup(\mathbb{L} \cup \{L\}) = \bigcup \mathbb{L} \cup L$ ebenfalls regulär (Induktionsbehauptung) nach Aufgabe 8.

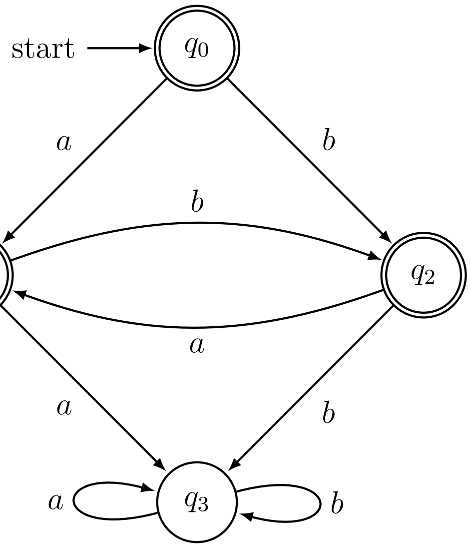
Aufgabe 10 Nein. Jede Sprache L ist Vereinigung der regulären Sprachen $\{w\}$ mit $w \in L$, aber nicht jede Sprache ist regulär.

Aufgabe 11



Aufgabe 12 Alle Wörter, die zwei b's unmittelbar nacheinander enthalten. $(a|b)^* bb(a|b)^*$.

Aufgabe 13



Aufgabe 14 Für $m \neq n$ ist $b^m \in L[a^m]$ und $b^m \notin L[a^n]$, also $L[a^m] \neq L[a^n]$. Es gibt also unendlich viele verschiedene $L[u]$.

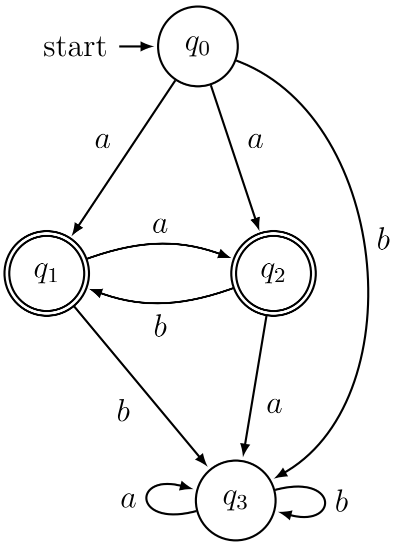
Aufgabe 15 Sei $L := \{a^q \mid q \text{ ist eine Quadratzahl}\}$. Angenommen, L werde von einem deterministischen endlichen Automaten akzeptiert. Dann gäbe es nach dem Pumping Lemma eine natürliche Zahl n so, dass sich jedes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n$ als Konkatenation $w = xyz$ schreiben lässt mit

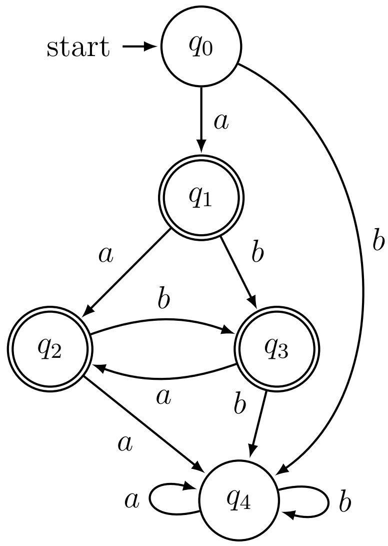
- $y \neq \epsilon$
- $|xy| \leq n$
- Für alle $k \geq 0$ ist $xy^kz \in L$.

Sei nun m die kleinste Quadratzahl $\geq n$ und sei $w := a^m$. Dann ist $w \in L$ und $|w| \geq n$. Nach dem Pumping Lemma lässt sich w schreiben als xyz wie oben. Sei $i := |xz|$ und $j := |y|$. Dann wäre $a^{i+jk} = xy^kz \in L$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Also wäre $i + jk$ eine Quadratzahl für alle $k \in L$. Wegen $y \neq \epsilon$ ist aber $j > 0$. Dies kann nicht sein, da die Abstände zwischen aufeinanderfolgenden Quadratzahlen beliebig groß werden. Zum Beispiel können nicht sowohl $i + jj$ als auch $i + j(j + 1)$ Quadratzahlen sein.

Blatt 5

Aufgabe 1





$a(\epsilon|b)(ab)^*(\epsilon|a)$

Bei den Aufgaben 2 bis 5 stellen wir die jeweilige Funktion h dar mit dem Ansatz $h = (Rfg)$. Dazu stellen wir im ersten Schritt Rekursionsgleichungen

$$\begin{aligned} h(x_1, \ldots, x_n, 0) &= \langle \textit{rechte Seite 1} \rangle \\ h(x_1, \ldots, x_n, y') &= \langle \textit{rechte Seite 2} \rangle \end{aligned}$$

auf, wobei in $\langle$*rechte Seite 1*$\rangle$ die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ sowie in $\langle$*rechte Seite 2*$\rangle$ die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ und y und der Ausdruck $h(x_1, \ldots, x_n, y)$ vorkommen dürfen. Es muss also Funktionen f und g geben so, dass sich $\langle$*rechte Seite 1*$\rangle$ als $f(x_1, \ldots, x_n)$ schreiben lässt und dass sich $\langle$*rechte Seite 2*$\rangle$ als $g(h(x_1, \ldots, x_n, y), x_1, \ldots, x_n, y)$ schreiben lässt. Diese Ausdrücke fügen wir im zweiten Schritt zu den Rekursionsgleichungen hinzu:

$$\begin{aligned} h(x_1, \ldots, x_n, 0) &= \langle \textit{rechte Seite 1} \rangle & &= f(x_1, \ldots, x_n) \\ h(x_1, \ldots, x_n, y') &= \langle \textit{rechte Seite 2} \rangle & &= g(h(x_1, \ldots, x_n, y), x_1, \ldots, x_n, y) \end{aligned}$$

Nach Definition von (Rfg) gilt dann $h = (Rfg)$.

Aufgabe 2 Stelle die Rekursionsgleichungen für die Funktion add (oder +) auf: $x+0 = x$ und $x + y' = x + (y + 1) = (x + y) + 1 = (x + y)'$ und füge im zweiten Schritt für den Ansatz add $= (Rfg)$ die Ausdrücke $f(x)$ und $g(x + y, x, y)$ hinzu:

$$\begin{aligned} x + 0 &= x & &= f(x) \\ x + y' &= (x + y)' & &= g(x + y, x, y), \end{aligned}$$

wobei $f(x) := x$ und $g(u, x, y) := u'$ sei, also $f(x) = x = P^1_1(x)$ und $g(u, x, y) = u' = N(u) = N(P^3_1(u, x, y)) = (NP^3_1)(u, x, y)$. Somit ist $f = P^1_1$ und $g = (NP^3_1)$ und daher add $= (Rfg) = (RP^1_1(NP^3_1))$. Die Funktion add ist also primitivrekursiv.

Bei dieser Argumentation wurde implizit die Tatsache verwendet, dass aus Satz 1 der Vorlesung folgt, dass die Rekursionsgleichungen die Funktion + eindeutig definieren und daher add $= (Rfg)$ ist. Alternativ kann man $h := (Rfg)$ definieren, also $h = (RP_1^1(NP_1^3))$. Nach Definition von (Rfg) gelten dann für h die Rekusionsgleichungen $h(x,0) = f(x) = x$ und $h(x,y') = g(h(x,y),x,y) = h(x,y)'$. Aus den Rekursionsgleichungen für + und für h

$$\begin{aligned} x + 0 &= x & \qquad h(x,0) &= x \\ x + y' &= (x+y)' & \qquad h(x,y') &= h(x,y)' \end{aligned}$$

kann man dann $x + y = h(x,y)$ durch vollständige Induktion nach y beweisen:
Induktionsanfang: $x + 0 = x = h(x,0)$.
Induktionsvoraussetzung (IV): Sei $x + y = h(x,y)$.
Induktionsschritt: $x + y' = (x+y)' \overset{\text{IV}}{=} h(x,y)' = h(x,y')$.
Nach dem Extensionalitätsprinzip ist daher add $= h$. Also ist add primitivrekusiv.

Ähnlich konstruiert man sich die Darstellungen der Funktionen der folgenden Aufgaben mit primitiver Rekursion und Komposition (primitivrekursive Funktionale) aus den Rekursionsgleichungen:

Aufgabe 3 Ansatz mul $= (Rfg)$:

$$\begin{aligned} x \cdot 0 &= 0 & \qquad &= f(x) \\ x \cdot y' &= x \cdot y + x & \qquad &= g(x \cdot y, x, y) \end{aligned}$$

mit $f(x) := 0$ und $g(u,x,y) := u + x$, also $f = K_0^1$ und $g = (\text{add}\, P_1^3 P_2^3)$.
mul $= (RK_0^1(\text{add}\, P_1^3 P_2^3))$ ist primitivrekursiv. Zu K_0^1 siehe Aufgabe 6.

Aufgabe 4 Ansatz pot $= (Rfg)$:

$$\begin{aligned} x^0 &= 1 & \qquad &= f(x) \\ x^{y'} &= x^y \cdot x & \qquad &= g(x^y, x, y) \end{aligned}$$

mit $f(x) := 1$ und $g(u,x,y) := u \cdot x$, also $f = K_1^1$ und $g = (\text{mul}\, P_1^3 P_2^3)$.
pot $= (RK_1^1(\text{mul}\, P_1^3 P_2^3))$ ist primitivrekursiv. Zu K_1^1 siehe Aufgabe 6.

Aufgabe 5 Ansatz $V = (Rfg)$:

$$\begin{aligned} V(0) &= 0 & \qquad &= f() \\ V(y') &= y & \qquad &= g(V(y), y) \end{aligned}$$

mit $f() := 0$ und $g(u,y) := y$, also $f = O$ und $g = P_2^2$.
$V = (ROP_2^2)$ ist primitivrekursiv.

Aufgabe 6 K_c^0 lässt sich durch Komposition darstellen, da $K_c^0() = N(N(\dots N(0)\dots))$ ist und daher $K_c^0 = (N(N\dots(NO)\dots))$. Also ist K_c^0 primitivrekursiv. Für K_c^1 machen wir einen Ansatz $K_c^1 = (Rfg)$:

$$\begin{aligned} K_c^1(0) &= c & &= f() \\ K_c^1(y') &= K_c^1(y) & &= g(K_c^1(y), y) \end{aligned}$$

mit $f() := c$ und $g(u, y) := u$, also $f = K_c^0$ und $g = P_1^2$.
$K_c^1 = (RK_c^0 P_1^2)$ ist also ebenfalls primitivrekursiv. Für $n > 1$ lässt sich K_c^n nun durch Komposition darstellen: $K_c^n = (K_c^1 P_1^n)$.

Aufgabe 7 Ansatz $\mathrm{fak} = (Rfg)$:

$$\begin{aligned} 0! &= 1 & &= f() \\ y'! &= y! \cdot y' & &= g(y!, y) \end{aligned}$$

mit $f() := 1$ und $g(u, y) := u \cdot y'$, also $f = K_1^0$ und $g = (\mathrm{mul}\, P_1^2(NP_2^2))$.
$\mathrm{fak} = (RK_1^0(\mathrm{mul}\, P_1^2(NP_2^2)))$ ist primitivrekursiv.

Aufgabe 8 Es gilt $\mathrm{diff}(x, 0) = x - 0 = x$. Weiters $\mathrm{diff}(x, y') = V(\mathrm{diff}(x, y))$, weil

- Wenn $x > y$, dann $\mathrm{diff}(x, y') = x - y' = x - y - 1$ und $\mathrm{diff}(x, y) = x - y$.
- Wenn $x = y$, dann $\mathrm{diff}(x, y') = 0$ und $\mathrm{diff}(x, y) = x - y = 0$.
- Wenn $x < y$, dann $\mathrm{diff}(x, y') = 0$ und $\mathrm{diff}(x, y) = 0$.

Sei nun $h := (RP_1^1(VP_1^3))$. Dann ist $h(x, 0) = P_1^1(x) = x$ und
$h(x, y') = (VP_1^3)(h(x, y), x, y) = V(P_1^3(h(x, y), x, y)) = V(h(x, y))$. Zusammengefasst:

$$\begin{aligned} \mathrm{diff}(x, 0) &= x & h(x, 0) &= x \\ \mathrm{diff}(x, y') &= V(\mathrm{diff}(x, y)) & h(x, y') &= V(h(x, y)) \end{aligned}$$

Wegen der Eindeutigkeit der Definition durch die Rekursionsgleichungen gilt $\mathrm{diff} = h$.

Alternativ: Beweis von $\mathrm{diff}(x, y) = h(x, y)$ durch vollständige Induktion nach y:
Induktionsanfang: $\mathrm{diff}(x, 0) = x = h(x, 0)$.
Induktionsvoraussetzung (IV): Sei $\mathrm{diff}(x, y) = h(x, y)$.
Induktionsschritt: $\mathrm{diff}(x, y') = V(\mathrm{diff}(x, y)) \overset{\mathrm{IV}}{=} V(h(x, y)) = h(x, y')$.

Blatt 6

Aufgabe 1 Petersche Funktion p

$$
\begin{aligned}
p(0,y) &= 1+y \\
p(1,y) &= 2+y \\
p(2,y) &= 3+2y \\
p(3,y) &= -3+2^{3+y} \\
p(4,y) &= -3+2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}} \qquad (3+y \text{ mal die } 2) \\
p(5,0) &= p(4,1) = -3+2^{2^{2^{2}}} = -3+2^{2^4} = -3+2^{16} = 65533 \\
p(6,0) &= p(5,1) = p(4,p(5,0)) = p(4,65533) = -3+2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}} \qquad (65536 \text{ mal die } 2)
\end{aligned}
$$

Der Stapel wäre weit größer als das bekannte Universum selbst bei Ziffern in Atomgröße.