Proseminar Theoretische Informatik
Elmar Eder, Universität Salzburg

Blatt 4, Aufgaben für 12.5.2021

Aufgabe 1 Geben Sie die Potenzmenge der Menge $\{2, 3, 4\}$ an! Geben Sie die Potenzmenge der Menge $\{(2, 3), (4, 5)\}$ an!

Aufgabe 2 Nehmen Sie die Logik mit Gleichheitsaxiomen sowie die Axiome der Mengenlehre an. Zeigen Sie damit, dass gilt: Seien A, B und C Mengen. Zeigen Sie

(a) Umkehrung des Extensionalitätsaxioms:
Wenn $A = B$ ist, dann gilt $\forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

(b) Wenn A eine Menge ist, dann ist auch $\{A\}$ eine Menge.

(c) Die Vereinigung zweier Mengen ist eine Menge.

(d) Wenn A, B und C Mengen sind, dann ist auch $\{A, B, C\}$ eine Menge.

Aufgabe 3 Geben Sie für jedes der folgenden Erzeugungssysteme an, welche Menge von Objekten es erzeugt!

(a) Objekte sind reelle Zahlen.

$$\begin{array}{ll} \text{Axiom:} & 0 \\[1ex] \text{Regel:} & \dfrac{x}{x+1} \end{array}$$

(b) Objekte sind reelle Zahlen.

$$\begin{array}{ll} \text{Axiom:} & 1 \\[1ex] \text{Regel:} & \dfrac{x \qquad y}{x-y} \end{array}$$

(c) Objekte sind reelle Zahlen.

$$\begin{array}{ll} \text{Axiom:} & 1 \\[1ex] \text{Regeln:} & \dfrac{x \qquad y}{x-y} \\[1ex] & \dfrac{x \qquad y}{x/y}\ , \quad \text{wenn } y \neq 0. \end{array}$$

(d) Gegeben sei ein Würfel im dreidimensionalen euklidischen Raum. Objekte sind Punkte des Raumes.

Axiome: Die 8 Eckpunkte des Würfels

Regel: $$\frac{\vec{x} \qquad \vec{y}}{\alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{y}}\ , \quad \text{wenn } 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Die Regel sagt aus, dass man aus zwei Punkten des Raumes jeden Punkt auf der Verbindungsstrecke dieser beiden Punkte erzeugen kann.

(e) Gegeben seien zwei zueinander windschiefe Geraden g und h im dreidimensionalen euklidischen Raum. Objekte sind Punkte des Raumes.

Axiome: Alle Punkte der Geraden h

Regel: $\frac{\vec{x}}{\vec{y}}$, wenn $\vec{y}$ aus $\vec{x}$ durch Drehung um die Achse g entsteht

Aufgabe 4 Betrachten wir als Objekte (Gegenst"ande) die nat"urlichen Zahlen. Dann wird durch die folgenden Regeln ein Erzeugungssystem definiert:

Axiome: 3

5

Regel: $$\frac{x \quad y}{x+y}.$$

Welche Zahlen sind in diesem Erzeugungssystem herleitbar?

Aufgabe 5 Gegeben sei das Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Die Sprache L_1 über dem Alphabet Σ sei die Menge aller Wörter über Σ, die nur aus a's bestehen, d.h. die das Zeichen b nicht enthalten. Die Sprache L_2 über dem Alphabet Σ sei die Menge aller Wörter über Σ, die nur aus b's bestehen. Geben Sie für jede der Sprachen $\overline{L_1}$, $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$, $L_1 \setminus L_2$, L_1L_2, $\{a, b\}^*$, $\{ab\}^*$, L_1^* und L_1^+ explizit an, aus welchen Wörtern sie besteht.

Aufgabe 6 Geben Sie einen regulären Ausdruck für die Sprache $\overline{L_{a^*}}$ über dem Alphabet $\{a, b\}$ an!

Aufgabe 7 Die Wörter

$$\varepsilon, a, ab, aba, abab, \ldots, b, ba, bab, baba, \ldots$$

sind dadurch charakterisiert, dass sie nur die Zeichen a und b enthalten, wobei sich a und b abwechseln. Die Menge

$$\{\varepsilon, a, ab, aba, abab, \ldots, b, ba, bab, baba, \ldots\}$$

dieser Wörter ist eine Sprache über dem Alphabet $\{a, b\}$. Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der genau diese Sprache bezeichnet.

Aufgabe 8 Seien L und L' zwei reguläre Sprachen über demselben Alphabet Σ. Zeigen Sie, dass die Sprachen $L \cup L'$, LL' und L^* regulär sind!

Aufgabe 9 Sei Σ ein Alphabet und $\mathbb{L}$ eine endliche Menge von regulären Sprachen über Σ. Zeigen Sie, dass dann die Sprache $\bigcup \mathbb{L}$ ebenfalls regulär ist!

Aufgabe 10 Ist auch die Vereinigung einer unendlichen Menge von regulären Sprachen über Σ stets wieder regulär? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 11 Gegeben sei der deterministische endliche Automat (DEA) über dem Alphabet $\{a, b\}$ mit den Zuständen p, q und r und mit der folgendermaßen definierten Übergangsfunktion δ:

$$\begin{aligned}
\delta(p, a) &= p \\
\delta(p, b) &= q \\
\delta(q, a) &= p \\
\delta(q, b) &= r \\
\delta(r, a) &= r \\
\delta(r, b) &= r
\end{aligned}$$

Dabei sei p der Anfangszustand des Automaten und r der einzige Endzustand des Automaten. Die Dateien `dea_Simulation1.pl` und `dea_Simulation2.pl` enthalten zwei Varianten eines Prolog-Programms, das diesen deterministischen endlichen Automaten simuliert. Schauen Sie sich zunächst die Programme an und probieren Sie sie mit verschiedenen Eingabewörtern aus!

Nun zeichnen Sie den Graphen, der diesen endlichen Automaten darstellt!

Aufgabe 12 Welche Wörter werden von diesem endlichen Automaten akzeptiert? Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der genau die Menge der Wörter bezeichnet, die von diesem endlichen Automaten akzeptiert werden!

Aufgabe 13 Geben Sie einen deterministischen endlichen Automaten an, der genau die Wörter der Sprache von Aufgabe 7 akzeptiert!

Aufgabe 14 Beweisen Sie, dass es keinen deterministischen endlichen Automaten gibt, der die Sprache $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ akzeptiert!

Aufgabe 15 Beweisen Sie, dass es keinen deterministischen endlichen Automaten gibt, der die Sprache $\{a^q \mid q \text{ ist eine Quadratzahl}\}$ akzeptiert!