Proseminar Theoretische Informatik
Elmar Eder, Universität Salzburg

Blatt 3, Aufgaben für 21.4.2021

Aufgabe 1 Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

für alle natürlichen Zahlen n gilt!

Definition 1 Unter einer *n-elementigen Menge* verstehen wir eine Menge A, zu der eine bijektive Funktion $f : \{1, \ldots, n\} \to A$ existiert. Wenn wir eine n-elementige Menge gegeben haben, dann sagen wir auch, wir haben n Dinge oder Objekte gegeben.

Aufgabe 2 Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei A eine $(n+1)$-elementige Menge. Beweisen Sie
(a) A ist nicht leer, d.h. es existiert ein $x \in A$.
(b) Für jedes $x \in A$ ist $A \setminus \{x\}$ eine n-elementige Menge.
Hinweis: Hierzu müssen Sie zu einer gegebenen bijektiven Funktion $f : \{1, \ldots, n+1\} \to A$ ein Element von A bzw. eine bijektive Funktion $g : \{1, \ldots, n\} \to A \setminus \{x\}$ definieren.

Aufgabe 3 Formulieren Sie die Aussage "Wenn man von 6 Äpfeln einen Apfel entfernt, bleiben 5 Äpfel übrig" in der Sprache der Mengenlehre mit dem Begriff der bijektiven Funktion und zeigen Sie, wie sie aus dem in Aufgabe 2 bewiesenen Satz folgt!

Aufgabe 4 Sei $f : A \to B$ eine injektive Funktion und $x \in A$. Geben Sie eine injektive Funktion $g : A \setminus \{x\} \to B \setminus \{f(x)\}$ an!

Aufgabe 5 Seien n und m natürliche Zahlen mit $m < n$. Sei A eine n-elementige Menge und B eine m-elementige Menge. Beweisen Sie durch vollständige Induktion nach n, dass es keine injektive Abbildung $f : A \to B$ gibt!
Hinweis: Verwenden Sie dabei die in Aufgaben 2 und 4 bewiesenen Sätze!

Schubfachprinzip (englisch: pigeonhole principle) Wenn n Objekte in m Fächern stecken mit $m < n$, dann enthält mindestens ein Fach mindestens zwei Objekte.

Beispiel: Wenn 10 Tauben in einem Taubenschlag mit 9 Kästen untergebracht sind, enthält mindestens ein Kasten mindestens zwei Tauben.

Aufgabe 6 Erklären Sie, warum Aufgabe 5 das Schubfachprinzip ausdrückt!

Aufgabe 7 Das dreistellige Prädikat P auf der Menge der natürlichen Zahlen sei definiert durch

$$P(x, y, z) \Leftrightarrow x \cdot y = z.$$

Geben Sie für jede der folgenden Aussageformen über dem Individuenbereich der natürlichen Zahlen an, für welche Werte der Variablen x, y und z diese Aussageform wahr ist und für welche Werte der Variablen x, y und z sie falsch ist!

$$\begin{gathered}
\exists x\, P(x, 2, z) \\
\exists y\, P(x, y, z) \\
\exists z\, P(x, y, z) \\
\exists x \exists y \big(P(x, y, z) \wedge x > 1 \wedge y > 1\big) \\
\forall x \exists y \exists z\, P(x, y, z) \\
\forall x \exists y \forall z\, P(x, y, z)
\end{gathered}$$

Aufgabe 8 Schreiben Sie

$$\bigwedge_{\epsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \delta < \epsilon$$

so um, dass darin keine eingeschränkte Quantifizierung mehr vorkommt. Stellt dies als Aussage über dem Individuenbereich der ganzen Zahlen betrachtet eine wahre oder eine falsche Aussage dar? Stellt es als Aussage über dem Individuenbereich der reellen Zahlen betrachtet eine wahre oder eine falsche Aussage dar?

Aufgabe 9 Zeigen Sie, dass aus den Gleichheitsaxiomen folgt, dass die Gleichheitsrelation $=$ eine Äquivalenzrelation ist:

$$\begin{array}{cl}
\forall x\; x = x & \text{(Reflexivität)} \\
\forall x \forall y (x = y \Rightarrow y = x) & \text{(Symmetrie)} \\
\forall x \forall y \forall z (x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z) & \text{(Transitivität)}
\end{array}$$

Aufgabe 10 Wieviele n-stellige aussagenlogische Verknüpfungen gibt es? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 11 Geben Sie alle einstelligen Prädikate auf der Menge $\{a, x, z\}$ an! Geben Sie alle zweistelligen Prädikate auf der Menge $\{3, 4\}$ an!

Aufgabe 12 Sei D ein Individuenbereich mit k Elementen. Wieviele n-stellige Prädikate gibt es auf D?

Aufgabe 13 Geben Sie einen Individuenbereich D und ein zweistelliges Prädikat P auf D an derart, dass die Aussage

$$\forall x \neg P(x, x) \wedge \forall x \forall y \forall z \big(P(x, y) \wedge P(y, z) \Rightarrow P(x, z)\big) \wedge \forall x \exists y\, P(x, y)$$

wahr ist! Wir sagen, durch D und P sei ein *Modell* dieser Aussage gegeben. Geht das mit einem endlichen Individuenbereich D?