

Logik

Grundzeichen

- Aussagenvariablen P, Q, R, \dots
- Junktoren
 - \neg nicht
 - \wedge und
 - \vee oder
- Runde Klammern $(,)$

Formeln

Definition

Formeln sind spezielle Zeichenreihen aus Grundzeichen, und zwar

- 1 Jede **Aussagenvariable** ist eine Formel
- 2 Wenn F eine Formel ist, dann ist auch $\neg F$ eine Formel.
- 3 Wenn F und G Formeln sind, dann sind auch $(F \wedge G)$ und $(F \vee G)$ Formeln.

Interpretationen

Definition

Die Zeichen **w** und **f** heißen **Wahrheitswerte**. Sie stehen für „wahr“ bzw. „falsch“.

Definition

Eine **Interpretation** ist eine Abbildung von der Menge der Aussagenvariablen in die Menge der Wahrheitswerte.

Der Wahrheitswert einer Formel bei einer Interpretation

Definition

Der **Wahrheitswert** F' einer Formel F bei einer Interpretation I ist induktiv definiert durch

- ① $P' := I(P)$ für jede Aussagenvariable P .
- ② $(\neg F)' := \begin{cases} w, & \text{wenn } F' = f \\ f & \text{sonst} \end{cases}$
- ③ $(F \wedge G)' := \begin{cases} w, & \text{wenn } F' = w \text{ und } G' = w \\ f & \text{sonst} \end{cases}$
- ④ $(F \vee G)' := \begin{cases} w, & \text{wenn } F' = w \text{ oder } G' = w \\ f & \text{sonst} \end{cases}$

Einige Begriffe der Semantik

Definition

Ein **Modell** einer Formel F ist eine Interpretation I so, dass $F^I = w$ ist.

Einige Begriffe der Semantik

Definition

Ein **Modell** einer Formel F ist eine Interpretation I so, dass $F^I = w$ ist.

Definition

- Eine Formel F heißt **allgemeingültig**, wenn für jede Interpretation I gilt $F^I = w$.
- Eine Formel F heißt **erfüllbar**, wenn es eine Interpretation I gibt mit $F^I = w$.
- Andernfalls heißt sie **unerfüllbar**.

Einige Begriffe der Semantik

Definition

- G **folgt semantisch aus** F , in Zeichen $F \models G$, wenn jedes Modell von F auch Modell von G ist.
- F und G heißen **semantisch äquivalent**, in Zeichen $F \sim G$, wenn $F^I = G^I$ ist für alle Interpretationen I .

\sim ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Formeln.

Einige Begriffe der Semantik

Definition

Sei S eine Menge von Formeln und G eine Formel.

- I heißt **Modell** von S , wenn I Modell jeder Formel $F \in S$ ist.
- G **folgt semantisch aus** S , in Zeichen $S \models G$, wenn jedes Modell von S ein Modell von G ist.
- S heißt **erfüllbar**, wenn S ein Modell hat.
- Andernfalls heißt S **unerfüllbar**.

Einige semantische Äquivalenzen

$$F \wedge G \sim G \wedge F$$

Kommutativität von \wedge

$$F \vee G \sim G \vee F$$

Kommutativität von \vee

$$\neg\neg F \sim F$$

$$(F \wedge G) \wedge H \sim F \wedge (G \wedge H)$$

Assoziativität von \wedge

$$(F \vee G) \vee H \sim F \vee (G \vee H)$$

Assoziativität von \vee

$$F \wedge (G \vee H) \sim (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$$

Distributivgesetz

$$F \vee (G \wedge H) \sim (F \vee G) \wedge (F \vee H)$$

Distributivgesetz

$$F \wedge F \sim F$$

$$F \vee F \sim F$$

$$\neg(F \wedge G) \sim \neg F \vee \neg G$$

DeMorgan'sche Regel

$$\neg(F \vee G) \sim \neg F \wedge \neg G$$

DeMorgan'sche Regel

Eigenschaften semantischer Begriffe

Satz

Sei F eine Formel. Dann gilt:

- *F ist allgemeingültig $\iff \neg F$ ist unerfüllbar.*
- *F ist unerfüllbar $\iff \neg F$ ist allgemeingültig.*

Eigenschaften semantischer Begriffe

Satz

Sei F eine Formel. Dann gilt:

- F ist allgemeingültig $\iff \neg F$ ist unerfüllbar.
- F ist unerfüllbar $\iff \neg F$ ist allgemeingültig.

Satz

Sei S eine Formelmenge und F eine Formel. Dann gilt:

$$S \models F \iff S \cup \{\neg F\} \text{ ist unerfüllbar.}$$

Literal, Konjunktion, Disjunktion

Definition

Ein **Literal** ist eine Aussagenvariable P oder die Negation $\neg P$ einer Aussagenvariablen.

Literal, Konjunktion, Disjunktion

Definition

Ein **Literal** ist eine Aussagenvariable P oder die Negation $\neg P$ einer Aussagenvariablen.

Definition (**Konjunktion** $F_1 \wedge \cdots \wedge F_n$ von Formeln F_1, \dots, F_n)

- Die **Konjunktion von F_1** ist F_1 .
- $F_1 \wedge \cdots \wedge F_{n+1} := (F_1 \wedge \cdots \wedge F_n) \wedge F_{n+1}$.

Literal, Konjunktion, Disjunktion

Definition

Ein **Literal** ist eine Aussagenvariable P oder die Negation $\neg P$ einer Aussagenvariablen.

Definition (**Konjunktion** $F_1 \wedge \cdots \wedge F_n$ von Formeln F_1, \dots, F_n)

- Die **Konjunktion von** F_1 ist F_1 .
- $F_1 \wedge \cdots \wedge F_{n+1} \equiv (F_1 \wedge \cdots \wedge F_n) \wedge F_{n+1}$.

Definition (**Disjunktion** $F_1 \vee \cdots \vee F_n$ von Formeln F_1, \dots, F_n)

- Die **Disjunktion von** F_1 ist F_1 .
- $F_1 \vee \cdots \vee F_{n+1} \equiv (F_1 \vee \cdots \vee F_n) \vee F_{n+1}$.

Konjunktive und disjunktive Normalform

Definition

Eine Formel F ist in **konjunktiver Normalform (KNF)**, wenn sie eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen ist.

Konjunktive und disjunktive Normalform

Definition

Eine Formel F ist in **konjunktiver Normalform (KNF)**, wenn sie eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen ist.

Definition

Eine Formel F ist in **disjunktiver Normalform (DNF)**, wenn sie eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen ist.

Verwandlung in Normalform

Satz

Zu jeder Formel F gibt es eine Formel F' in KNF mit $F \sim F'$.

Verwandlung in Normalform

Satz

Zu jeder Formel F gibt es eine Formel F' in KNF mit $F \sim F'$.

Satz

Zu jeder Formel F gibt es eine Formel F' in DNF mit $F \sim F'$.

Verwandlung in Normalform

Satz

Zu jeder Formel F gibt es eine Formel F' in KNF mit $F \sim F'$.

Satz

Zu jeder Formel F gibt es eine Formel F' in DNF mit $F \sim F'$.

Beweis mit

- DeMorgan'schen Regeln
- Elimination doppelter Negationen
- Ausmultiplizieren mit Distributivgesetz

KNF in Prolog

$p \text{ :- } q, r.$

$q.$

$r.$

$?- p.$

$(p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge$

$q \wedge$

$r \wedge$

$\neg p$

Klauseln in der Logik

Definition

Eine **Klausel in der Logik** ist eine endliche Menge von Literalen.

Beispiel

$\{P, \neg Q, \neg R\}$ für die Formel $P \vee \neg Q \vee \neg R$

Resolution

Die Resolutionsregel

$$\frac{c \quad d}{(c \setminus \{L\}) \cup (d \setminus \{\bar{L}\})} \quad , \quad \text{wenn } L \in c \text{ und } \bar{L} \in d.$$

Hornklauseln

Definition

- Ein **positives Literal** ist eine Aussagenvariable (also ein Literal, das kein Negationszeichen \neg enthält).
- Ein **negatives Literal** ist die Negation einer Aussagenvariablen (also ein Literal, das das Negationszeichen \neg enthält).

Hornklauseln

Definition

- Ein **positives Literal** ist eine Aussagenvariable (also ein Literal, das kein Negationszeichen \neg enthält).
- Ein **negatives Literal** ist die Negation einer Aussagenvariablen (also ein Literal, das das Negationszeichen \neg enthält).

Definition

- Eine **Hornklausel** (oder **definite Klausel**) ist eine Klausel, die höchstens ein positives Literal enthält.
- Eine **Programmklausel** ist eine Klausel, die genau ein positives Literal enthält.
- Eine **Anfrageklausel** oder **Zielklausel** (engl. **query clause** oder **goal clause**) ist eine Klausel, die kein positives Literal enthält.

SLD-Resolution

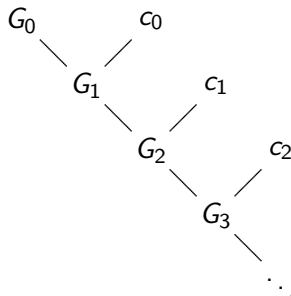
Definition

SLD-Resolution (Selection rule driven Linear resolution for Definite clauses) ist Resolution für Hornklauseln mit folgenden Einschränkungen

- Klauselmenge $S = P \cup \{G\}$
- P ist eine Menge von Programmklauseln.
- G ist eine Zielklausel.
- lineare Resolution:
In jedem Schritt wird eine Zielklausel mit einer Klausel des Programms P resolviert.
- In der beteiligten Zielklausel wird das wegzuresolvierende Literal durch eine “selection function” ausgewählt.
In Prolog standardmäßig das erste Literal der Zielklausel.

SLD-Resolution

Eine SLD-Resolutionsableitung hat die Form



wobei $G_0 \equiv G$ ist und $c_0, c_1, c_2, \dots \in P$ sind.

SLD-Resolution

Dabei muß jeder Resolutionsschritt die Form haben.

$$\frac{?- A_1, \dots, A_j, \dots, A_m. \quad A_j :- B_1, \dots, B_n.}{?- A_1, \dots, A_{j-1}, B_1, \dots, B_n, A_{j+1}, \dots, A_m.}$$

Das Literal A_j heißt dabei das **ausgewählte Literal**. Es wird dabei angenommen, daß eine **Auswahlfunktion** (englisch: **selection funktion**) gegeben sei, die zu einer Zielklausel das ausgewählte Literal findet.

Sprache der Prädikatenlogik erster Stufe

Grundzeichen

- **Variable**
- **Konstanten** (in Prolog: Atome und Zahlen)
- **Funktionszeichen** (in Prolog: Funktoren Atome)
- **Prädikatszeichen** (in Prolog: Prädikate Atome)
- **Junktoren** \neg , \wedge , \vee
- **Quantoren** \forall , \exists
- **Runde Klammern** $(,)$ und **Komma** $,$

Sprache der Prädikatenlogik erster Stufe

Terme

- Variable
- Konstanten
- $f(t_1, \dots, t_n)$

Formeln

- $P(t_1, \dots, t_n)$
- $\neg F, F \wedge G, F \vee G$
- $\forall x F, \exists x F$

Semantik der Prädikatenlogik erster Stufe

Interpretation / gegeben durch

- **Individuenbereich** (engl. domain) D (nichtleere Menge)
- **Funktion** ordnet jeder/jedem
 - Konstanten a ein $a^I \in D$
 - n -stelligen Funktionszeichen f eine Funktion $f^I: D^n \rightarrow D$
 - n -stelligen Prädikatszeichen P eine Relation $P^I \subseteq D^n$

zu.

Variablenbelegung V ordnet jeder Variablen x ein $x^V \in D$ zu.

Semantik der Prädikatenlogik erster Stufe

Wert t^{IV} eines Terms t bei I und V

- $x^{IV} := x^V$, wenn x Variable
- $a^{IV} := a^I$, wenn a Konstante
- $f(t_1, \dots, t_n)^{IV} := f^I(t_1^{IV}, \dots, t_n^{IV})$

$$V_\xi^x(y) := \begin{cases} \xi, & \text{wenn } y \equiv x \\ V(y) & \text{sonst} \end{cases}$$

Semantik der Prädikatenlogik erster Stufe

Wahrheitswert F^{IV} einer Formel F bei I und V

- $P(t_1, \dots, t_n)^{IV} := \begin{cases} w, & \text{wenn } (t_1^{IV}, \dots, t_n^{IV}) \in P^I \\ f & \text{sonst} \end{cases}$
- $(\neg F)^{IV} := \begin{cases} w, & \text{wenn } F^{IV} = f \\ f & \text{sonst} \end{cases}$
- $(F \wedge G)^{IV} := \begin{cases} w, & \text{wenn } F^{IV} = w \text{ und } G^{IV} = w \\ f & \text{sonst} \end{cases}$
- $(F \vee G)^{IV} := \begin{cases} w, & \text{wenn } F^{IV} = w \text{ oder } G^{IV} = w \\ f & \text{sonst} \end{cases}$
- $(\forall X F)^{IV} := \begin{cases} w, & \text{wenn } F^{IV_\xi^x} = w \text{ für alle } \xi \in D \\ f & \text{sonst} \end{cases}$
- $(\exists X F)^{IV} := \begin{cases} w, & \text{wenn } F^{IV_\xi^x} = w \text{ für mindestens ein } \xi \in D \\ f & \text{sonst} \end{cases}$

Semantik der Prädikatenlogik erster Stufe

Eine Formel heißt **geschlossen**, wenn

- jede Variable durch einen Quantor gebunden ist.

Dann ist F^I unabhängig von V und wir schreiben einfach F^I .

Eine geschlossene Formel F heißt

- **allgemeingültig**, wenn $F^I = w$ für alle I .
- **erfüllbar**, wenn $F^I = w$ für mindestens ein I .

Prologklauseln als Formeln

Beispiel

```
grossvater(X,Z) :-  
    vater(X,Y),  
    kind(Z,Y).
```

$$\forall X \forall Y \forall Z (\text{grossvater}(X, Z) \leftarrow \text{vater}(X, Y) \wedge \text{kind}(Z, Y))$$

$$\forall X \forall Y \forall Z (\text{grossvater}(X, Z) \vee \neg \text{vater}(X, Y) \vee \neg \text{kind}(Z, Y))$$

Prologklauseln als Formeln

Regel

$A: -B_1, \dots, B_n.$

$$\forall[A \vee \neg B_1 \vee \dots \vee \neg B_n]$$

Faktum

$A.$

$$\forall[A]$$

Anfrage

$?-B_1, \dots, B_n.$

$$\forall[\neg B_1 \vee \dots \vee \neg B_n]$$

Prologklauseln als Formeln

Beispiel

`?- grossvater(X,gabi).`

$\forall X \neg \text{grossvater}(X, \text{gabi})$

Prologklauseln als Formeln

Beispiel

```
kind(peter,hans).  
kind(gabi,peter).  
maennlich(hans).  
vater(X,Y) :- kind(Y,X), maennlich(X).  
grossvater(X,Z) :- vater(X,Y), kind(Z,Y).  
?- grossvater(X,gabi).
```

Prologklauseln als Formeln

Beispiel

$$\begin{aligned} & \text{kind}(\text{peter}, \text{hans}) \wedge \\ & \text{kind}(\text{gabi}, \text{peter}) \wedge \\ & \text{maennlich}(\text{hans}) \wedge \\ & \forall X \forall Y (\text{vater}(X, Y) \vee \neg \text{kind}(Y, X) \vee \neg \text{maennlich}(X)) \wedge \\ & \forall X \forall Y \forall Z (\text{grossvater}(X, Z) \vee \neg \text{vater}(X, Y) \vee \neg \text{kind}(Z, Y)) \wedge \\ & \forall X \neg \text{grossvater}(X, \text{gabi}) \end{aligned}$$