# Aufgaben
# Formale Grundlagen und Methoden

Elmar Eder

10. Januar 2021

3.10.2019

**Präsenzaufgabe 1** Welche der Aussagen von `beamer.pdf` S.10 sind wahr, welche falsch?

**Präsenzaufgabe 2** Zeichnen Sie die Wahrheitswerttafel für $A \wedge \neg B \Rightarrow B \vee C$ !

**Präsenzaufgabe 3** Seien $A$, $B$ und $C$ drei Aussagen. Drücken Sie die Aussage „Genau eine der drei Aussagen $A$, $B$ und $C$ ist wahr“ durch aussagenlogische Verknüpfung der Aussagen $A$, $B$ und $C$ mit Junktoren $\neg$, $\wedge$ und $\vee$ aus! Dabei bedeutet „genau eine“ soviel wie „eine und nur eine“.

10.10.2019

**Aufgabe 1** Drücken Sie das Verum $\top$ und das Falsum $\bot$ durch aussagenlogische Verknüpfung einer beliebigen Aussage $A$ mit Junktoren $\neg$, $\wedge$ und $\vee$ aus und zeichnen Sie dazu jeweils eine Wahrheitswerttafel!

**Aufgabe 2** In der Vorlesung haben wir Wahrheitswerttafeln für die einstellige aussagenlogische Verknüpfung $\neg$ und für die zweistelligen aussagenlogischen Verknüpfungen $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$ kennengelernt. Zeichnen Sie nun Wahrheitswerttafeln für die Verknüpfungen „entweder … oder …“ (alias „aut“ oder „xor“), „weder … noch …“ (alias „nor“), „nicht beide Aussagen …“ („nand“) sowie „genau eine der drei Aussagen …“ (wie in Präsenzaufgabe 3)!

**Aufgabe 3** Welche zweistelligen aussagenlogischen Verknüpfungen gibt es sonst noch? Zeichnen Sie dazu die Wahrheitswerttafeln! Wieviele zweistellige aussagenlogische Verknüpfungen gibt es insgesamt?

**Aufgabe 4** Drücken Sie für jede zweistellige aussagenlogische Verknüpfung $\circ$ die Aussage $A \circ B$ durch $\neg$, $\wedge$ und $\vee$ aus!

**Aufgabe 5** Führen Sie einen indirekten Beweis, dass $\sqrt{2}$ irrational ist! D.h., nehmen Sie an, $\sqrt{2}$ wäre rational, und leiten Sie daraus einen Widerspruch ab!

17.10.2019

**Aufgabe 6** Formulieren Sie für eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Aussage „$f$ ist differenzierbar" mittels eingeschränkter Quantifizierung und mit nicht eingeschränkter Quantifizierung!

**Aufgabe 7** Wieviele $n$-stellige aussagenlogische Verknüpfungen gibt es?

**Aufgabe 8** Zeigen Sie mittels der Gleichheitsaxiome, dass die Gleichheit $=$ eine Äquivalenzrelation ist, d.h., dass für alle $x$, $y$ und $z$ gilt

(a) $x = x$.

(b) Wenn $x = y$, dann $y = x$.

(c) Wenn $x = y$ und $y = z$, dann $x = z$.

**Aufgabe 9** Eine natürliche Zahl $n$ heißt *gerade*, wenn es eine natürliche Zahl $k$ gibt mit $n = 2k$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion nach $n$, dass für alle natürlichen Zahlen $n$ gilt: $n$ ist gerade oder $n+1$ ist gerade!

**Aufgabe 10** Finden Sie einen geschlossenen Ausdruck für $\sum_{i=0}^{n} i$ ähnlich, wie wir es in der Vorlesung für $\sum_{i=0}^{n} 1$ gemacht haben, und beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass $\sum_{i=0}^{n} i$ gleich diesem Ausdruck ist!

24.10.2019

**Aufgabe 11** Man kann eine semantische Äquivalenz in der Aussagenlogik zeigen, indem man eine Wahrheitswerttafel aufstellt, z.B. für die semantische Äquivalenz $\neg(F \wedge \neg G) \sim \neg F \vee G$ die Wahrheitswerttafel

| $F$ | $G$ | $\neg(F \wedge \neg G)$ | $\neg F \vee G$ |
|---|---|---|---|
| w | w | w | w |
| w | f | f | f |
| f | w | w | w |
| f | f | w | w |

mit je einer Zeile für jede Möglichkeit, welchen Wahrheitswert w oder f die Formeln $F$ und $G$ haben könnten. In jedem der hier vier Fälle werden die Wahrheitswerte der beiden Formeln, von denen die semantische Äquivalenz behauptet wurde, berechnet und in die Tabelle eingetragen. Die Spalten für die beiden Formeln $\neg(F \wedge \neg G)$ und $\neg F \vee G$ sind identisch. Daher sind die Formeln $\neg(F \wedge \neg G)$ und $\neg F \vee G$ zueinander semantisch äquivalent.

Zeigen Sie die in der Datei `beamer.pdf` auf S.44 behaupteten semantischen Äquivalenzen, indem Sie jeweils eine Wahrheitswerttafel aufstellen!

**Aufgabe 12** Zeigen Sie $F \models F \vee G$, indem Sie eine Wahrheitswerttafel mit einer Spalte für $F$ und einer Spalte für $F \vee G$ aufstellen und dann verifizieren, dass bei allen Interpretationen, bei denen $F$ wahr ist, auch $F \vee G$ wahr ist!

**Aufgabe 13** Betrachten wir die Sprache der Aussagenlogik mit den Aussagensymbolen $P$, $Q$ und $R$ und den Junktoren $\neg$, $\wedge$ und $\vee$. Geben Sie alle Modelle der Formel $(P \vee \neg Q) \wedge R$ an!

**Aufgabe 14** Geben Sie jeweils eine Formel an, die

(a) allgemeingültig

(b) nicht allgemeingültig

(c) erfüllbar

(d) unerfüllbar

ist!

**Aufgabe 15** Zeigen Sie die Allgemeingültigkeit der Formel $P \vee \neg Q \vee (\neg P \wedge Q)$, indem Sie eine Wahrheitswerttafel aufstellen! Wieviele Zeilen hat diese Wahrheitswerttafel? Wieviele Zeilen hat die Wahrheitswerttafel einer Formel mit $n$ Aussagensymbolen $P_1, \ldots, P_n$? Was können Sie über den Rechenaufwand dieses Verfahrens zur Feststellung, ob eine aussagenlogische Formel allgemeingültig ist, sagen?

**Aufgabe 16** Sei $P$ ein zweistelliges Prädikatszeichen (das also für eine zweistellige Relation auf dem Individuenbereich steht). Drücken Sie die Aussage „$P$ ist eine Äquivalenzrelation" durch eine geschlossene prädikatenlogische Formel aus!

**Aufgabe 17** Wir haben einige aussagenlogische Verknüpfungen kennengelernt. Zu jeder aussagenlogischen Verknüpfung gibt es eine entsprechende Verknüpfung (Operation) auf Mengen. Zum Beispiel entspricht der aussagenlogischen Verknüpfung $\wedge$ die Verknüpfung $\cap$ (Durchschnitt) auf Mengen, denn es gilt für Mengen $A$ und $B$:

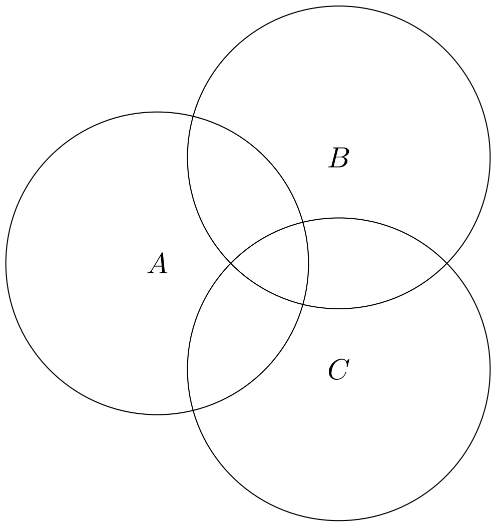
$$x \in A \ \wedge \ x \in B \iff x \in A \cap B.$$

Wenn wir $F$ für $x \in A$ und $G$ für $x \in B$ schreiben, dann gilt also $F \wedge G$ genau dann, wenn $x$ Element von $A \cap B$ ist. Wir können die Entsprechung zwischen Aussagen und Mengen so in einer Tabelle schreiben:

| Aussage | Menge |
|---|---|
| $F \wedge G$ | $A \cap B$ |
| $F \vee G$ | $\ldots$ |
| $\neg F$ | $\ldots$ |
| $F \Rightarrow G$ | $\ldots$ |
| $F \Leftrightarrow G$ | $\ldots$ |
| $\ldots$ | $A \setminus B$ |

Ergänzen Sie die fehlenden Ausdrücke!

**Aufgabe 18** Man kann sich Verknüpfungen auf Mengen geometrisch veranschaulichen durch Mengendiagramme. Zeichnen Sie dazu in der Ebene im kartesischen (also $x$-$y$-) Koordinatensystem um die Punkte $(-8, 0)$, $(4, 7)$ und $(4, -7)$ jeweils einen Kreis mit Radius 10. Das innere des ersten Kreises, also die Menge aller Punkte die im Inneren der Kreislinie sind, stellt die Menge $A$ dar, das innere des zweiten Kreises die Menge $B$ und das Innere des dritten Kreises die Menge $C$:




Kennzeichnen Sie nun die Menge $A$, indem Sie das innere des ersten Kreises ausmalen oder schraffieren! Tun Sie das entsprechende für die Mengen $A \cup B$, $A \setminus C$, $B \cap C$, $\overline{A}$ und $(A \cup B) \setminus C$! Wie kann man an einem Mengendiagramm erkennen, ob eine Menge Teilmenge einer anderen Menge ist?

7.11.2019

**Aufgabe 19** Sei $U$ eine nichtleere Menge, die uns als Universum dienen soll. Seien $A$, $B$ und $C$ Teilmengen von $U$. Geben Sie alle Möglichkeiten an, drei Mengen $X$, $Y$ und $Z$ auszuwählen mit $X \in \{\overline{A}, A\}$, $Y \in \{\overline{B}, B\}$ und $Z \in \{\overline{C}, C\}$! Wieviele Möglichkeiten sind das? Testen Sie Ihre Antwort, indem Sie an Prolog die Anfrage

```
?- member(X,[a_quer,a]), member(Y,[b_quer,b]), member(Z,[c_quer,c]).
```

stellen und dabei nach jeder von Prolog gelieferten Antwort einen Strichpunkt eingeben! Seien nun $n$ Teilmengen $A_1, \ldots, A_n$ von $U$ gegeben. Wieviele Möglichkeiten gibt es, $n$ Mengen $X_1, \ldots, X_n$ auszuwählen mit $X_1 \in \{\overline{A_1}, A_1\}, \ldots, X_n \in \{\overline{A_n}, A_n\}$?

**Aufgabe 20** Ein *Mengendiagramm* stellt $n$ Mengen $A_1, \ldots, A_n$ dar als jeweils das Innere einer geschlossenen Kurve in der Ebene. Daran kann man dann Durchschnitt, Vereinigung, Komplement und Differenz von Mengen veranschaulichen, indem man die entsprechenden Teile der Ebene mit Farbe ausmalt oder schraffiert, wie wir das bereits in Aufgabe 18 für drei Mengen $A$, $B$ und $C$ gemacht haben. Ein Mengendiagramm heißt *Venn-Diagramm*, wenn dabei die Mengen $A_1, \ldots, A_n$ so gewählt sind, dass für alle $X_1 \in \{\overline{A_1}, A_1\}, \ldots, X_n \in \{\overline{A_n}, A_n\}$ gilt: $X_1 \cap \cdots \cap X_n \neq \emptyset$. Ein Beispiel für ein Venn-Diagramm ist das Diagramm aus Aufgabe 18. Kennzeichnen Sie darin alle Mengen $X \cap Y \cap Z$ mit $X \in \{\overline{A}, A\}$, $Y \in \{\overline{B}, B\}$ und $Z \in \{\overline{C}, C\}$ und verifizieren Sie, dass sie nichtleer sind!

**Aufgabe 21** Veranschaulichen Sie anhand von Venn-Diagrammen die Kommutativgesetze, Assoziativgesetze, Distributivgesetze, deMorgan'schen Gesetze für $\cap$ und $\cup$ sowie das Gesetz $\overline{\overline{A}} = A$!

**Aufgabe 22** Zeichnen Sie ein Mengendiagramm für drei Mengen $A$, $B$ und $C$ mit $A \subseteq B$ und zeigen Sie, dass dieses Mengendiagramm kein Venn-Diagramm ist! Welche der Mengen $X \cap Y \cap Z$ mit $X \in \{\overline{A}, A\}$, $Y \in \{\overline{B}, B\}$ und $Z \in \{\overline{C}, C\}$ sind hier leer?

**Aufgabe 23** Zeichnen Sie ein Venn-Diagramm für vier Mengen!

14.11.2019

**Aufgabe 24** Seien $a$ und $b$ zwei verschiedene Dinge. Geben Sie alle Funktionen $f\colon \{a, b\} \to \{1, 2\}$ an! Welche dieser Funktionen sind injektiv, welche surjektiv und welche bijektiv?

**Aufgabe 25** Geben Sie eine echte Teilmenge $A$ der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen (d.h. eine Menge $A$ mit $A \subseteq \mathbb{N}$ und $A \neq \mathbb{N}$) an, die gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist, und geben Sie die dazugehörige bijektive Abbildung (=Funktion) $f\colon \mathbb{N} \to A$ an!

**Aufgabe 26** Sei $M$ eine Menge $\{a, b, c\}$ von drei verschiedenen Dingen $a, b, c$. Zeigen Sie, dass $M$ nicht gleichmächtig zu einer echten Teilmenge von $M$ ist!

**Aufgabe 27** Zeigen Sie, dass die Äquivalenz

$$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

gilt!

**Aufgabe 28** Geben Sie jeweils an, ob die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injektiv, surjektiv, bijektiv ist!

(a) $f(x) = 3 - 2x$
(b) $f(x) = x^2 + 3$
(c) $f(x) = x^3 - 2$
(d) $f(x) = \sin x$
(e) $f(x) = e^x + 2$
(f) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{wenn } x \neq 0 \\ 0, & \text{wenn } x = 0 \end{cases}$

Geben Sie jeweils eine Begründung für Ihre Antworten an!

**Definition 1** Bei einer endlichen Menge $A$ versteht man unter der *Mächtigkeit* $|A|$ von $A$ die Anzahl ihrer Elemente.

21.11.2019

**Aufgabe 29** Seien $A$ und $B$ endliche Mengen. Was für Aussagen können Sie über die Mächtigkeiten der Mengen $A$, $B$, $A \cap B$, $A \cup B$ und $A \setminus B$ machen?

**Aufgabe 30** Sei $A$ Teilmenge eines endlichen Universums $U$. Was für Aussagen können Sie über die Mächtigkeiten der Mengen $A$, $U$ und $\overline{A}$ machen?

**Definition 2** Hilberts Hotel ist ein Hotel mit abzählbar unendlich vielen Zimmern: Zimmer 1, Zimmer 2, Zimmer 3, und so weiter. Das besondere an diesem Hotel ist, dass man darin, auch wenn es bereits voll belegt ist, noch einen weiteren Gast unterbringen kann. Dazu zieht der Gast von Zimmer 1 um ins Zimmer 2, der Gast von Zimmer 2 um ins Zimmer 3, und so weiter. Dadurch wird das Zimmer 1 frei und man kann darin den neuen Gast unterbringen.

**Aufgabe 31** Sei Hilberts Hotel bereits voll belegt.

(a) Jetzt kommt ein Bus mit drei neuen Gästen an. Erklären Sie, wie man die im Hotel noch unterbringen kann!

(b) Wie geht es, wenn ein Bus mit abzählbar unendlich vielen neuen Gästen ankommt?

(c) Wie geht es, wenn abzählbar unendlich viele Busse mit jeweils abzählbar unendlich vielen Gästen ankommen?

**Aufgabe 32** Für zwei Mengen $A$ und $B$ ist $B^A$ definiert als die Menge aller Funktionen von $A$ nach $B$, also $B^A := \{f \mid f \colon A \to B\}$.
(a) Für welche Mengen $A$ und $B$ ist $B^A$ endlich?
(b) Für welche Mengen $A$ und $B$ ist $B^A$ abzählbar?
Begründen Sie Ihre Antworten!

**Definition 3**

(a) Für zwei Funktionen $f \colon A \to B$ und $g \colon B \to C$ ist die *Komposition* $g \circ f \colon A \to C$ von $g$ und $f$ definiert durch $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ für alle $x \in A$.

(b) Für eine bijektive Funktion $f \colon A \to B$ ist die *Umkehrfunktion* oder *inverse Funktion* $f^{-1} \colon B \to A$ von $f$ definiert durch $f^{-1}(y) = x$ für $y = f(x)$.

28.11.2019

**Aufgabe 33**

(a) Zeigen Sie, dass dies tatsächlich Funktionen $g \circ f \colon A \to C$ bzw. $f^{-1} \colon B \to A$ sind!

(b) Zeichnen Sie für eine geignete bijektive Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ den Graphen von $f$ und den Graphen von $f^{-1}$ als Kurve in der Ebene!

(c) Durch welche geometrische Transformation entsteht Graph($f^{-1}$) aus Graph($f$)?

**Aufgabe 34** Seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = 4x - 1$ und $g(x) = x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $f$ bijektiv ist und geben Sie die Funktionen $g \circ f$ und $f^{-1}$ explizit an!

**Definition 4** Wir definieren die *Potenzierungsfunktion* $\mathrm{pot}\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ induktiv wie folgt, wobei wir die abkürzende Schreibweise $x^y$ für $\mathrm{pot}(x, y)$ verwenden:

(a) $x^0 = 1$

(b) $x^{y+1} = x^y \cdot x$.

**Aufgabe 35** Berechnen Sie $2^3$ durch wiederholte Anwendung obiger Rekursionsgleichungen! Ist die Potenzierungsfunktion injektiv? Ist sie surjektiv?

**Definition 5** Wir definieren die *Fakultätsfunktion* $\mathrm{fak}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ induktiv wie folgt, wobei wir die Abkürzung $x!$ für $\mathrm{fak}(x)$ verwenden:

(a) $0! = 1$

(b) $(x + 1)! = x! \cdot (x + 1)$.

5.12.2019

**Aufgabe 36** Berechnen Sie 3! durch wiederholte Anwendung obiger Rekusionsgleichungen! Ist die Fakultätsfunktion injektiv? Ist sie surjektiv?

**Aufgabe 37** Seien $m$ und $n$ zwei natürliche Zahlen und sei $A$ eine Menge der Mächtigkeit $m$ und $B$ eine Menge der Mächtigkeit $n$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion nach $m$, dass die Mächtigkeit von $B^A$ gleich $n^m$ ist, dass es also genau $n^m$ Abbildungen von $A$ nach $B$ gibt!

**Aufgabe 38**

(a) Seien $a$, $b$ und $c$ drei verschiedene Dinge. Geben Sie alle bijektiven Abbildungen von $\{a, b, c\}$ nach $\{a, b, c\}$ an! Wieviele sind das?

(b) Sei $n$ eine natürliche Zahl und seien $A$ und $B$ Mengen der Mächtigkeit $n$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion nach $n$, dass die Anzahl der bijektiven Abbildungen von $A$ nach $B$ gleich $n!$ ist! 12.12.2019

Insbesondere gilt also für eine $n$-elementige Menge $A$, dass es genau $n!$ bijektive Abbildungen von $A$ nach $A$ gibt. Bijektive Abbildungen von $A$ nach $A$ nennt man *Permutationen* oder *Vertauschungen*.

**Aufgabe 39** Sei $A$ eine endliche Menge mit genau $m$ Elementen und $B$ eine endliche Menge mit genau $n$ Elementen. Wieviele bijektive Funktionen $f\colon A \to B$ gibt es? Begründen Sie Ihre Antwort!

**Aufgabe 40** Zeigen Sie, dass für die Binomialkoeffizienten die folgenden Gleichungen gelten!

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \qquad \text{für } k < n$$

**Aufgabe 41** Die Sprache $L$ über dem Alphabet $\{a, b, c\}$ sei die Menge derjenigen Wörter über diesem Alphabet, deren Länge ungerade ist.

(a) Aus welchen Wörtern bestehen die Sprachen $LL$, $L^*$ und $L^+$?

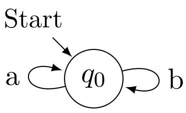
(b) Geben Sie einen regulären Ausdruck für die Sprache $L$ an!

19.12.2019

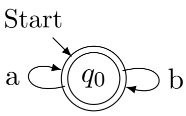
**Aufgabe 42** Geben Sie alle Wörter $w$ der Sprache $L_{((a^*b)a^*)}$ mit $|w| \leq 3$ an!

**Aufgabe 43** Geben Sie alle Wörter $w$ der Sprache $L_{(a|b)^*}$ mit $|w| \leq 2$ an!

**Aufgabe 44** Welche Sprache akzeptiert der endliche Automat

(a) 

? Geben Sie für diese Sprache einen regulären Ausdruck an!

(b) 

? Geben Sie für diese Sprache einen regulären Ausdruck an!

**Aufgabe 45** Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \text{ ist gerade}\}$.

(a) Geben Sie alle Wörter aus $L$ an, die höchstens die Länge 5 haben!

(b) Zeichnen Sie einen minimalen endlichen Automaten, der die Sprache $L$ akzeptiert!

**Aufgabe 46** Sei $\Sigma$ das Alphabet $\{a, b\}$ und sei die Sprache $L$ die Menge derjenigen Wörter über $\Sigma$, die mindestens zwei $a$'s oder mindestens zwei $b$'s unmittelbar hintereinander enthalten. Zeichnen Sie einen minimalen deterministischen endlichen Automaten, der die Sprache $L$ akzeptiert und einen minimalen deterministischen endlichen Automaten, der die Sprache $\Sigma^* \setminus L$ akzeptiert!

9.1.2020

**Aufgabe 47** Sei $Q = \{q_0\}$ und $\Sigma = \{a, b\}$. Die Übergangsrelation $\Delta \subseteq Q \times \Sigma^* \times Q$ sei gegeben durch die Zeilen

$$\begin{array}{ccc} q_0 & ab & q_0 \\ q_0 & aab & q_0 \end{array}$$

und es sei $F = \{q_0\}$.

(a) Zeichnen Sie den Graphen des (nichtdeterministischen) endlichen Automaten mit Wortübergängen $(Q, \Sigma, \Delta, q_0, F)$!

(b) Geben Sie einen regulären Ausdruck für die durch diesen Automaten akzeptierte Sprache an!

(c) Konstruieren Sie aus diesem Automaten wie in der Vorlesung gezeigt einen nichtdeterministischen endlichen Automaten mit Zeichenübergängen, der dieselbe Sprache akzeptiert! Dazu müssen Sie jeden Wortübergang unter Verwendung von Zwischenzuständen durch mehrere Zeichenübergänge ersetzen.

(d) Konstruieren Sie zu diesem nichtdeterministischen endlichen Automaten (mit Zeichenübergängen) wie in der Vorlesung gezeigt einen deterministischen endlichen Automaten, der dieselbe Sprache akzeptiert! Jeder Zustand dieses deterministischen endlichen Automaten ist eine Menge von Zuständen des nichtdeterministischen endlichen Automaten.

**Aufgabe 48** Sei $Q = \{q_0, r_0, r_1, s_0, s_1, s_2, t_0, t_1, t_2, t_3, t_4\}$ und $\Sigma = \{a\}$. Die Übergangsrelation $\Delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ sei gegeben durch die Zeilen

$$\begin{array}{ccc} q_0 & a & r_0 \\ q_0 & a & s_0 \\ q_0 & a & t_0 \\ r_0 & a & r_1 \\ r_1 & a & r_0 \\ s_0 & a & s_1 \\ s_1 & a & s_2 \\ s_2 & a & s_0 \\ t_0 & a & t_1 \\ t_1 & a & t_2 \\ t_2 & a & t_3 \\ t_3 & a & t_4 \\ t_4 & a & t_0 \end{array}$$

und es sei $F = \{r_1, s_1, s_2, t_1, t_2, t_3, t_4\}$.

(a) Zeichnen Sie den Graphen des nichtdeterministischen endlichen Automaten $(Q, \Sigma, \Delta, q_0, F)$!

(b) Welche Sprache akzeptiert dieser Automat?

(c) Geben Sie einen deterministischen endlichen Automaten an, der dieselbe Sprache akzeptiert!

16.1.2020

**Aufgabe 49** Sei $Q = \{q, r, s, t\}$ und $\Sigma = \{a\}$. Die Übergangsrelation $\Delta \subseteq Q \times \Sigma^* \times Q$ sei gegeben durch die Zeilen

$$\begin{array}{ccc} q & \epsilon & r \\ q & \epsilon & s \\ q & \epsilon & t \\ r & aa & r \\ s & aaa & s \\ t & aaaaa & t \end{array}$$

und es sei $F = \{r, s, t\}$.

(a) Zeichnen Sie den Graphen des (nichtdeterministischen) endlichen Automaten mit Wortübergängen $(Q, \Sigma, \Delta, q, F)$!

(b) Konstruieren Sie dazu einen nichtdeterministischen endlichen Automaten (mit Zeichenübergängen), der dieselbe Sprache akzeptiert!

(c) Welche Sprache akzeptieren diese Automaten?

(d) Geben Sie einen deterministischen endlichen Automaten an, der dieselbe Sprache akzeptiert!

**Aufgabe 50** In der Vorlesung wurde gezeigt, dass jede von einem endlichen Automaten akzeptierte Sprache regulär ist. Aus dem Beweis des Satzes lässt sich direkt ablesen, wie man einen regulären Ausdruck für diese Sprache konstruieren kann. Sei nun $Q = \{q_0, q_1\}$ und $\Sigma = \{a, b\}$. Die Übergangsrelation $\Delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ sei gegeben durch die Zeilen

$$\begin{array}{ccc} q_0 & a & q_1 \\ q_1 & b & q_0 \end{array}$$

und es sei $F = \{q_0\}$.

(a) Zeichnen Sie den Graphen des nichtdeterministischen endlichen Automaten $(Q, \Sigma, \Delta, q_0, F)$!

(b) Konstruieren Sie einen regulären Ausdruck für die vom Automaten akzeptierte Sprache, indem Sie dem Beweis des Satzes aus der Vorlesung folgen!

(c) Geben Sie einen kürzeren regulären Ausdruck für dieselbe Sprache an!

23.1.2020

**Aufgabe 51** Geben Sie das Pascalsche Dreieck bis zur Zeile 8 an, wobei Sie mit der Zählung der Zeilen bei 0 anfangen! Die Zeile 8 fängt also mit „1 8“ an.

**Aufgabe 52** Sei $\Sigma$ das Alphabet $\Sigma = \{\sqcup, \mathtt{F}, \mathtt{W}, \mathtt{a}, \mathtt{c}, \mathtt{e}, \mathtt{h}, \mathtt{i}, \mathtt{n}, \mathtt{o}, \mathtt{r}, \mathtt{t}\}$ und sei $w$ das Wort $\mathtt{Frohe{\sqcup}Weihnachten}$ über $\Sigma$. Sei $r := |\Sigma|$ und $n := |w|$. Das Alphabet $\Sigma$ besteht also aus $r$ verschiedenen Zeichen $a_1, \ldots, a_r$ (Nehmen Sie die Zeichen $a_1, \ldots, a_r$ in oben angegebener Reihenfolge an, also $a_1 = \sqcup, \ldots, a_r = \mathtt{t}$). Das Wort $w$ hat die Länge $n$. Für $i = 1, \ldots, r$ sei $k_i$ die Anzahl der Vorkommen des Zeichens $a_i$ im Wort $w$. Zum Beispiel ist `e` das sechste Zeichen $a_6$ des Alphabets $\Sigma$ in oben angegebener Reihenfolge und es kommt genau drei mal in $w$ vor; daher ist $k_6 = 3$. Es gilt $n = k_1 + \cdots + k_r$. Die Sprache $L$ über $\Sigma$ sei die Menge aller Wörter, die sich aus dem Wort $w$ durch Vertauschung von Zeichen ergeben (inklusive dem Wort $w$ selbst). Die Elemente von $L$ heißen *Permutationen mit Wiederholung* von $w$, da einige Zeichen in $w$ wiederholt vorkommen (zum Beispiel das `e` drei mal). In der Kombinatorik interessiert man sich unter anderem für die Anzahl der Permutationen mit Wiederholung von Objekten (hier von Buchstaben). Vertauschung von wiederholten Objekten untereinander liefert dabei keine neue Permutation (in unserem Beispiel kein neues Wort). Wenn man zum Beispiel in `Frohe Weihnachten` die beiden n's vertauscht, kommt dieselbe Permutation mit Wiederholung (dasselbe Wort) heraus. Die betreffende Permutation mit Wiederholung / das betreffende Wort darf daher nur einmal gezählt werden.

(a) Bestimmen Sie die Zahlen $n, r, k_1, \ldots, k_r$.

(b) Bestimmen Sie die Anzahl $|L|$ der Wörter in $L$. Geben Sie allgemein die Anzahl der Permutationen mit Wiederholung von $n$ Objekten an, wobei jeweils $k_i$ Objekte ($i = 1, \ldots, r$) zueinander identisch sind und $n = k_1 + \cdots + k_r$ ist.

(c) Bestimmen Sie die Anzahl der Sprachen $L[u]$ und damit die Anzahl der Zustände eines minimalen deterministischen endlichen Automaten für die Sprache $L$.

Versuchen Sie zunächst, die Aufgabe ohne weitere Hinweise zu lösen! Anschließend schauen Sie sich bitte das SWI-Prolog-Programm `frohe_Weihnachten.pl` genau an! Dann laden Sie bitte das Programm in Ihr SWI-Prolog-System und führen alle im Programm angegebenen Anfragen aus!

**Aufgabe 53** Die Menge $\mathbb{N}$ zusammen mit der darauf definierten natürlichen Ordnungsrelation $\leq$, also $(\mathbb{N}, \leq)$, ist eine Wohlordnung, d.h. jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$ hat ein kleinstes Element. Zeigen Sie, dass daraus folgt, dass für alle $a \in \mathbb{Z}$ auch $(\{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq a\}, \leq)$ eine Wohlordnung ist.

**Aufgabe 54** Seien $m$ und $n$ natürliche Zahlen mit $m \leq n$. Zeigen Sie, dass jede $n$-elementige Menge genau $\binom{n}{m}$ Teilmengen der Mächtigkeit $m$ besitzt.

**Aufgabe 55** Auf der Menge $G = \{0, 1\}$ sei die zweistellige innere Verknüpfung $\oplus$ definiert durch

$$a \oplus b := (a + b) \bmod 2$$

für alle $a, b \in \{0, 1\}$. Stellen Sie eine Additionstabelle für $\oplus$ auf und zeigen Sie, dass $(G, \oplus)$ eine Gruppe ist!

**Aufgabe 56** Auf der Menge $G = \{0, 1, 2, 3\}$ sei die zweistellige innere Verknüpfung $\oplus$ definiert durch

$$a \oplus b := (a + b) \bmod 4$$

für alle $a, b \in \{0, 1, 2, 3\}$. Stellen Sie eine Additionstabelle für $\oplus$ auf und zeigen Sie, dass $(G, \oplus)$ eine Gruppe ist!

**Aufgabe 57** Auf der Menge $G = \{0, 1\}$ sei die zweistellige innere Verknüpfung $\otimes$ definiert durch

$$a \otimes b := (a \cdot b) \bmod 2$$

für alle $a, b \in \{0, 1\}$. Stellen Sie eine Multiplikationstabelle für $\otimes$ auf! Ist $(G, \otimes)$ eine Gruppe? Ist $(G \setminus \{0\}, \otimes)$ eine Gruppe?

**Aufgabe 58** Auf der Menge $G = \{0, 1, 2, 3\}$ sei die zweistellige innere Verknüpfung $\otimes$ definiert durch

$$a \otimes b := (a \cdot b) \bmod 4$$

für alle $a, b \in \{0, 1, 2, 3\}$. Stellen Sie eine Multiplikationstabelle für $\otimes$ auf! Ist $(G, \otimes)$ eine Gruppe? Ist $(G \setminus \{0\}, \otimes)$ eine Gruppe?

**Aufgabe 59** Auf der Menge $R = \{0, 1\}$ seien die beiden zweistelligen inneren Verknüpfungen $\oplus$ und $\otimes$ definiert durch

$$a \oplus b := (a + b) \bmod 2$$
$$a \otimes b := (a \cdot b) \bmod 2$$

für alle $a, b \in \{0, 1\}$. Zeigen Sie, dass $(R, \oplus, \otimes)$ ein kommutativer Ring mit Einselement ist! Ist $(R, \oplus, \otimes)$ ein Körper?

**Aufgabe 60** Auf der Menge $R = \{0, 1, 2, 3\}$ seien die beiden zweistelligen inneren Verknüpfungen $\oplus$ und $\otimes$ definiert durch

$$a \oplus b := (a + b) \bmod 4$$
$$a \otimes b := (a \cdot b) \bmod 4$$

für alle $a, b \in \{0, 1, 2, 3\}$. Zeigen Sie, dass $(R, \oplus, \otimes)$ ein kommutativer Ring mit Einselement ist! Ist $(R, \oplus, \otimes)$ ein Körper?

**Aufgabe 61** Zeigen Sie durch vollständige Induktion nach $n$ den binomischen Lehrsatz

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k,$$

d.h.

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} x^1 y^{n-1} + \binom{n}{n} x^0 y^n$$

**Aufgabe 62** Der euklidische Algorithmus dient der Berechnung des größten gemeinsamen Teilers $\mathrm{ggT}(a,b)$ zweier ganzer Zahlen $a$ und $b$ durch wiederholte Division mit Rest

$$c : d = q \text{ Rest } r.$$

Dabei ist $c$ der Dividend (Zähler), $d$ der Divisor (Nenner), $q$ der Ganzzahlquotient und $r$ der Rest. Beim ersten Schritt wählt man $c := a$ und $d := b$. In jedem Folgeschritt ist $c_{\text{neu}} = d_{\text{alt}}$ und $d_{\text{neu}} = r_{\text{alt}}$. Sobald der Rest $r = 0$ ist, bricht der Algorithmus ab und $\mathrm{ggT}(a,b) = d$. Hier ist die Berechnung von $\mathrm{ggT}(38,8)$ mit dem euklidischen Algorithmus:

$$\begin{aligned} 38 : 8 &= 4 \text{ Rest } 6 \\ 8 : 6 &= 1 \text{ Rest } 2 \\ 6 : 2 &= 3 \text{ Rest } 0 \end{aligned}$$

und $\mathrm{ggT}(38,8) = 2$.

Beim erweiterten euklidischen Algorithmus stellt man zusätzlich die Zahlen $a$ und in jedem Schritt den Divisor $d$ als $ax + by$ mit $x, y \in \mathbb{Z}$ dar, in unserem Beispiel:

$$\begin{array}{rcr} 38 = 38 \cdot 1 + 8 \cdot 0 & & \\ 8 = 38 \cdot 0 + 8 \cdot 1 & 38 : 8 = 4 \text{ Rest } 6 & 6 = 38 - 8 \cdot 4 \\ 6 = 38 \cdot 1 + 8 \cdot (-4) & 8 : 6 = 1 \text{ Rest } 2 & 2 = 8 - 6 \cdot 1 \\ 2 = 38 \cdot (-1) + 8 \cdot 5 & 6 : 2 = 3 \text{ Rest } 0 & \end{array}$$

Dabei stellt die erste Spalte jeweils die Gleichung $d = ax+y$ dar und die zweite Spalte die Division mit Rest $c : d = q \mathrm{Rest} r$. Diese Division habe ich hier noch in einer dritten Spalte als Gleichung $r = c - dq$ für den Rest $r$ umgeschrieben. Wenn man darin das $c$ und das $d$ gemäß den Gleichungen aus der ersten Spalte ersetzt, bekommt man die $x$- und $y$-Werte für die erste Spalte der nächsten Zeile. Links unten steht die im Lemma von Bézout behauptete Darstellung des $\mathrm{ggT}(a,b)$ als $ax + by$, hier $\mathrm{ggT}(38,8) = 2 = 38 \cdot (-1) + 8 \cdot 5$.

Berechnen Sie mit dem euklidischen Algorithmus $\mathrm{ggT}(500,35)$ und finden Sie Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(500,35) = 500x + 35y$ mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus!

**Zur Gruppentheorie:** Sei $(G, *)$ eine Gruppe und $H$ eine Teilmenge von $G$, die zusammen mit der Verknüpfung $*$ selbst eine Gruppe ist. Dann nennt man diese Gruppe eine *Untergruppe* von $(G, *)$. Für $a \in G$ heißt dann die Menge $aH := \{a * h \mid h \in H\}$ eine

*Linksnebenklasse* von $H$ und die Menge $Ha := \{h * a \mid h \in H\}$ eine *Rechtsnebenklasse* von $H$. Wenn $*$ kommutativ ist, sind beide Begriffe dasselbe und wir sprechen einfach von einer *Nebenklasse*.

**Aufgabe 63** Sei $(\mathbb{Z}, +)$ die Gruppe der ganzen Zahlen mit der Addition. Geben Sie alle Untergruppen dieser Gruppe an!

**Aufgabe 64** Sei $(\mathbb{Z}, +)$ die Gruppe der ganzen Zahlen mit der Addition und sei $H$ die Menge der durch 3 teilbaren ganzen Zahlen. Dann ist $(H, +)$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$. Geben Sie alle Nebenklassen dieser Untergruppe an!