

# Aufgaben

## Formale Grundlagen und Methoden

Elmar Eder

bis 21. Dezember 2020

### Aufgabe 21.Dez-1

- (a) Bilden Sie ausgehend von den Zahlen 8 und 12 nacheinander Differenzen, zum Beispiel  $8 - 8 = 0$ ,  $8 - 12 = -4$ ,  $0 - 12 = -12$ ,  $-12 - (-4) = -8$  und so weiter! Schreiben Sie die Zahlen, die dabei herauskommen, in natürlicher Reihenfolge hin (ähnlich wie  $\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots$  aus der letzten Zeile von `notizen.pdf`)!
- (b) Die Menge dieser Zahlen ist die kleinste Menge  $I$  von ganzen Zahlen, sodass  $8 \in I$  und  $12 \in I$  und für alle  $x, y \in I$  auch  $x - y \in I$  ist. Diese Menge  $I$  ist das von der Menge  $\{8, 12\}$  erzeugte Ideal  $(\{8, 12\})$ . Geben Sie  $I$  als Menge an!
- (c) Das Ideal  $I$  ist ein Hauptideal  $(t)$ , das heißt, es besteht aus den Vielfachen  $tz$  (mit  $z \in \mathbb{Z}$ ) einer bestimmten Zahl  $t$ . Geben Sie die Zahl  $t$  an!
- (d) Jede Zahl aus  $I$  ergibt sich durch wiederholte Differenzbildung aus den Zahlen 8 und 12 und lässt sich daher in der Form  $8x + 12y$  mit ganzen Zahlen  $x$  und  $y$  schreiben. Schreiben Sie die Zahl  $t$  in der Form  $8x + 12y$ , finden Sie also ganze Zahlen  $x$  und  $y$ , sodass  $t = ax + by$  gilt!
- (e) Verifizieren Sie, dass  $t$  ein Teiler sowohl von 8 als auch von 12 ist, das heißt, dass 8 und 12 Vielfache von  $t$  sind!
- (f) Verifizieren Sie, dass  $t$  der größte gemeinsame Teiler von 8 und 12 ist, indem Sie zum Beispiel alle Teiler von 8 und alle Teiler von 12 angeben und daraus die größte Zahl ablesen, die sowohl Teiler von 8 als auch Teiler von 12 ist!

**Aufgabe 21.Dez-2** Machen Sie mit den Zahlen 38 und 8 das gleiche, was Sie in der vorigen Aufgabe mit den Zahlen 8 und 12 gemacht haben! Schauen Sie sich dann in `aufgaben.pdf` Aufgabe 62 an, wie man mit dem euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von 38 und 8 systematisch bestimmen kann und wie man mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus ganze Zahlen  $x$  und  $y$  finden kann, sodass der größte gemeinsame Teiler von 38 und 8 gleich  $38x + 8y$  ist!

**Präsenzaufgabe 21.Dez-3**  $\text{ggT}(12, 8)$  berechnen.

Weiters bearbeiten Sie bitte aus `aufgaben.pdf` einige der Aufgaben 32–40 sowie 46–50!