15.12.2020

Starke Induktion:

Eine Variante des Prinzips der vollständigen Induktion: Sei P ein einstelliges Prädikat auf der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen. Weiters nehmen wir an, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ der folgende *Induktionsschritt* gültig ist:

IS: Wenn $P(k)$ für alle natürlichen Zahlen $k < n$ gilt, dann gilt auch $P(n)$.

Dann gilt $P(n)$ für alle natürlichen Zahlen n.

Zum *Beweis* definieren wir ein einstelliges Prädikat Q auf $\mathbb{N}$ folgendermaßen:

DefQ: $Q(n)$ bedeute, dass $P(k)$ für alle natürlichen Zahlen $k < n$ gilt.

Wir zeigen durch (gewöhnliche) vollständige Induktion nach n, dass $Q(n)$ für alle natürlichen Zahlen n gilt:

Induktionsanfang: $Q(0)$ gilt trivialerweise, da keine natürliche Zahl $k < 0$ existiert.

Induktionsschritt: Annahme (Induktionsvoraussetzung) n sei eine natürliche Zahl, für die $Q(n)$ gilt. Nach DefQ gilt $P(k)$ für alle natürlichen Zahlen $k < n$. Nach IS gilt dann auch $P(n)$. Insgesamt gilt $P(k)$ daher für alle natürlichen Zahlen $k < n + 1$. Nach DefQ gilt daher $Q(n + 1)$. Damit haben wir unter der Annahme $Q(n)$ bewiesen, dass $Q(n+1)$ gilt. Wir haben also den Induktionsschritt $Q(n) \Rightarrow Q(n+1)$ bewiesen.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt daher $Q(n)$ für alle natürliche Zahlen n. Sei nun n eine beliebige natürliche Zahl. Dann gilt also $Q(n + 1)$ und nach DefQ und wegen $n < n + 1$ daher $P(n)$. Also gilt $P(n)$ für alle natürlichen Zahlen n.