Frege-Hilbert-Kalküle

Ein Frege-Hilbert-Kalkül

$$A \to B \to A \tag{A1}$$

$$(A \to B \to C) \to (A \to B) \to A \to C \tag{A2}$$

$$(\neg A \to \neg B) \to B \to A \tag{A3}$$

$$\frac{A \quad A \to B}{B} \tag{R1}$$

Definition

Ein Beweis einer Formel F im Frege-Hilbert-Kalkül ist eine endliche Folge von Formeln, deren jede ein Axiom ist oder durch Regelanwendung aus vorhergehenden Formeln der Folge hervorgegangen ist, derart, dass F das letzte Glied der Folge ist.

Das Beweisen in Frege-Hiblert-Kalkülen ist schwer zu automatisieren:

- Versucht man, die Folge von ihrem Anfang ausgehend zu konstruieren, so muss man zunächst Axiome raten, von denen es unendlich viele gibt.
- Versucht man, die Folge von ihrem Ende ausgehend zu konstruieren, so muss man beim Modus Ponens (R1) die Formel A erraten. Da gibt es ebenfalls unendlich viele Möglichkeiten.

Man hat daher kaum Chancen, etwa durch eine systematische Suche einen Beweis zu finden.

Bemerkung

(R1) ist eine Schnittregel:
'A' kommt in den Prämissen vor, nicht aber in der Konklusion.

Herleitungen

Definition

- Eine Herleitung oder Ableitung einer Formel F aus einer Formelmenge S im Frege-Hilbert-Kalkül ist eine endliche Folge von Formeln, deren jede ein Axiom oder ein Element von S ist oder durch Regelanwendung aus vorhergehenden Formeln der Folge hervorgegangen ist, derart, dass F das letzte Glied der Folge ist.
- F ist im Frege-Hilbert-Kalkül aus S herleitbar oder ableitbar, wenn es im Frege-Hilbert-Kalkül eine Herleitung von F aus S gibt. Wir schreiben dann $S \vdash F$.

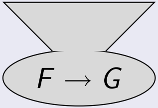
Das Deduktionstheorem

Satz (Deduktionstheorem)

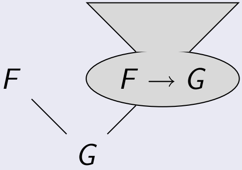
Sei S eine Formelmenge und seien F und G Formeln. Dann gilt

$$S \vdash F \rightarrow G \iff S \cup \{F\} \vdash G.$$

Beweis der Richtung „$\Rightarrow$“

Sei 

eine Herleitung von $F \rightarrow G$ aus S.

Dann ist 

eine Herleitung von G aus $S \cup \{F\}$.

Beweis der Richtung „$\Leftarrow$“ durch vollständige Induktion nach der Länge der Herleitung der Formel G aus der Formelmenge $S \cup \{F\}$

- *Induktionsanfang*:
  Die Herleitung besteht nur aus der Formel G.
  Dann liegt einer der zwei folgenden Fälle vor:

Fall 1 G ist ein Axiom oder $G \in S$.
Dann ist $G \to F \to G$ ein Axiom nach (A1).

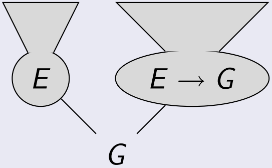
Daher ist
$$\begin{array}{ccc} G & & G \to F \to G \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & F \to G & \end{array}$$
eine Herleitung der Formel $F \to G$ aus S.

Fall 2 $G = F$.
Wir haben $\vdash F \to F$ bereits gezeigt.

Das Deduktionstheorem

Fortsetzung des Beweises von „$\Leftarrow$“

- *Induktionsschritt*:
  Sei $\mathcal{H}$ eine Herleitung der Formel G aus der Formelmenge $S \cup \{F\}$ und $\mathcal{H}$ bestehe nicht nur aus der Formel G.

  Dann hat $\mathcal{H}$ die Form 

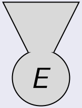
.

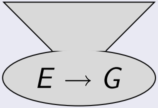
  Als *Induktionsvoraussetzung* nehmen wir an, dass für kürzere Herleitungen aus $S \cup \{F\}$ die Richtung „$\Leftarrow$“ gelte.

  Wir müssen zeigen, dass die Richtung „$\Leftarrow$“ auch für $\mathcal{H}$ gilt, d.h. $S \vdash F \to G$.

Das Deduktionstheorem

Fortsetzung des Beweises von „$\Leftarrow$“

Nun sind 

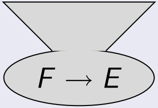
und 

Herleitungen aus $S \cup \{F\}$, die kürzer sind als $\mathcal{H}$.

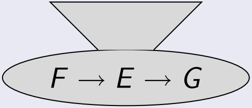
Das Deduktionstheorem

Fortsetzung des Beweises von „$\Leftarrow$“

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es daher Herleitungen



und



aus S.

Außerdem ist

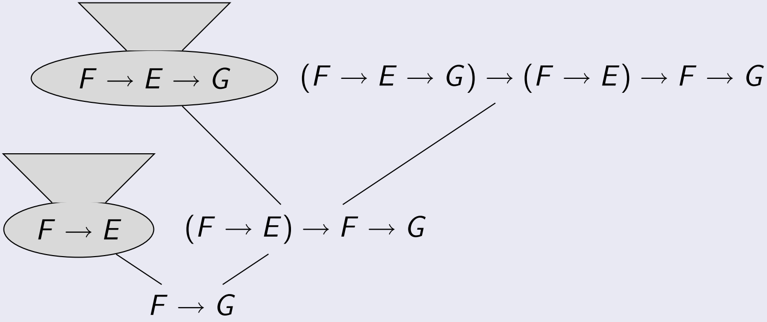
$$(F \rightarrow E \rightarrow G) \rightarrow (F \rightarrow E) \rightarrow F \rightarrow G$$

ein Axiom nach (A2).

Das Deduktionstheorem

Fortsetzung des Beweises von „$\Leftarrow$“

Also ist



eine Herleitung von $F \to G$ aus S. $\square$

Aufgabe

Aufgabe 19

Beweisen Sie $\neg\neg P \rightarrow P$ im Frege-Hilbert-Kalkül der Vorlesung!