

Konsolution

Beobachtung

Die Konnektionsmethode beruht auf der Tatsache, dass eine Formel semantisch äquivalent ist zu einer Konjunktion von Disjunktionen von Literalen, wobei jede der Disjunktionen einem Pfad p durch die Matrix entspricht.

Definition

- Ein **Pfad** schlechthin ist eine endliche Menge von Literalen. (Stellt eine Disjunktion von Literalen dar.)
- Eine **Pfadmenge** ist eine endliche Menge von Pfaden. (Stellt eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen dar.)

Aktuelle Pfadmenge in der Konnektionsmethode

Definition

Eine Pfadmenge \mathcal{P} heißt **aktuelle Pfadmenge** während eines versuchten Konnektionsbeweises einer Formel F , wenn die noch auf Komplementarität zu überprüfenden Pfade genau die Fortsetzungen der Pfade aus \mathcal{P} durch die Matrix von F sind.

Beispiel

P	$\neg P$	$\neg Q$	
Q	Q	R	$\neg R$
	R		
1	2	3	

Aktuelle Pfadmenge $\mathcal{P} = \{\{P, Q, R\}, \{P, R\}, \{Q\}\}$.

Aktuelle Pfadmenge in der Konnektionsmethode

Notation

Für eine Klausel c sei $\mathcal{P}_c := \{\{L\} \mid L \in c\}$.

Bemerkung

Am Anfang eines Konnektionsbeweises ist \mathcal{P}_c aktuelle Pfadmenge für eine beliebige Klausel c der Matrix.

Bemerkung

Während eines Versuches eines Konnektionsbeweises ist jeder nichtkomplementäre Pfad durch die Matrix eine Obermenge eines Pfades aus der aktuellen Pfadmenge.

Definition

Für zwei Pfadmengen \mathcal{P} und \mathcal{Q} sei
 $\mathcal{P}\mathcal{Q} := \{p \cup q \mid p \in \mathcal{P} \text{ und } q \in \mathcal{Q}\}.$

Lemma

Wenn jeder nichtkomplementäre Pfad durch eine Matrix M eine Obermenge eines Pfades aus einer Pfadmenge \mathcal{P} und eine Obermenge eines Pfades aus einer Pfadmenge \mathcal{Q} ist, dann ist er auch eine Obermenge eines Pfades aus $\mathcal{P}\mathcal{Q}$.

Die Vereinfachungsregeln für Pfadmengen

- Komplementäre Pfade dürfen aus einer Pfadmenge entfernt werden.
- Pfade in einer Pfadmenge dürfen gekürzt werden, d.h. ein Pfad q darf durch p ersetzt werden, wenn $p \subset q$ ist.

Die Konsolutionsregel

$$\frac{\mathcal{P} \quad \mathcal{Q}}{\mathcal{R}},$$

wenn \mathcal{R} aus $\mathcal{P}\mathcal{Q}$ durch Vereinfachung entsteht.

\mathcal{R} heißt **Konsolvente** von \mathcal{P} und \mathcal{Q} .

Definition

Ein **Konsolutionsbeweis** einer Matrix M ist eine endliche Folge $(\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_n)$ von Pfadmengen derart, dass gilt

- Jedes \mathcal{P}_k ist ein \mathcal{P}_c mit $c \in M$ oder ist Konsolvente zweier Pfadmengen \mathcal{P}_i und \mathcal{P}_j mit $i, j < k$.
- $\mathcal{P}_n = \{\}$.

Bemerkung

Ein Konsolutionsbeweis kann als Baum dargestellt werden.

Beispiel (nur mit Elimination komplementärer Pfade)

Matrix:

$$\begin{array}{ccc} \cancel{P} & \neg P & \\ \cancel{Q} & Q & \neg Q \end{array}$$

Pfadmengen:

$$\{\{P\}, \{Q\}\}$$

Beispiel (nur mit Elimination komplementärer Pfade)

Matrix:

$$\begin{array}{ccc} P & \cancel{\neg P} & \\ Q & \cancel{Q} & \neg Q \end{array}$$

Pfadmengen:

$$\{\{P\}, \{Q\}\}$$

$$\{\{\neg P\}, \{Q\}\}$$

Beispiel (nur mit Elimination komplementärer Pfade)

Matrix:

$$\begin{array}{ccc} P & \neg P & \cancel{\neg Q} \\ Q & Q & \end{array}$$

Pfadmengen:

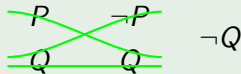
$$\{\{P\}, \{Q\}\}$$

$$\{\{\neg P\}, \{Q\}\}$$

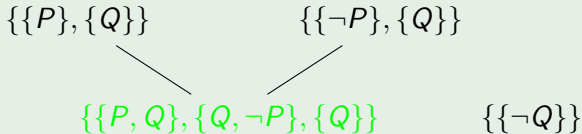
$$\{\{\neg Q\}\}$$

Beispiel (nur mit Elimination komplementärer Pfade)

Matrix:



Pfadmengen:

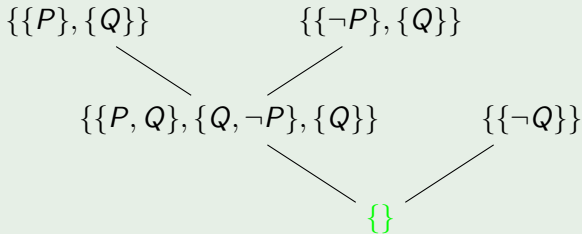


Beispiel (nur mit Elimination komplementärer Pfade)

Matrix:

$$\begin{array}{ccc} P & \neg P & \neg Q \\ Q & Q & \neg Q \end{array}$$

Pfadmengen:



Beispiel (mit voller Vereinfachung)

Matrix:

$$\begin{array}{ccc} \cancel{P} & \neg P & \\ \cancel{Q} & Q & \neg Q \end{array}$$

Pfadmengen:

$$\{\{P\}, \{Q\}\}$$

Beispiel (mit voller Vereinfachung)

Matrix:

$$\begin{array}{ccc} P & \cancel{\neg P} & \\ Q & \cancel{Q} & \neg Q \end{array}$$

Pfadmengen:

$$\{\{P\}, \{Q\}\}$$

$$\{\{\neg P\}, \{Q\}\}$$

Beispiel (mit voller Vereinfachung)

Matrix:

$$\begin{array}{ccc} P & \neg P & \neg Q \\ Q & Q & \neg Q \end{array}$$

Pfadmengen:

$$\{\{P\}, \{Q\}\}$$

$$\{\{\neg P\}, \{Q\}\}$$

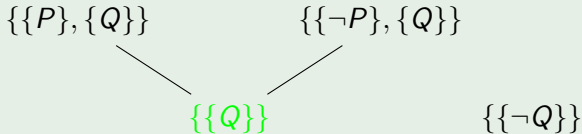
$$\{\{\neg Q\}\}$$

Beispiel (mit voller Vereinfachung)

Matrix:

$$\begin{array}{ccc} P & \neg P & \neg Q \\ \hline Q & Q & \neg Q \end{array}$$

Pfadmengen:

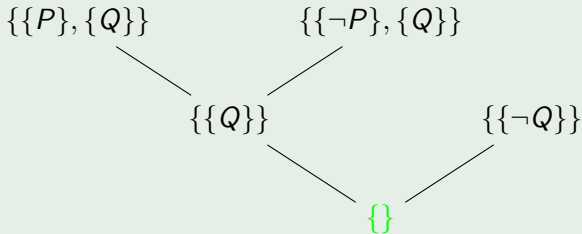


Beispiel (mit voller Vereinfachung)

Matrix:

$$\begin{array}{ccc} P & \neg P & \\ Q & Q & \neg Q \end{array}$$

Pfadmengen:

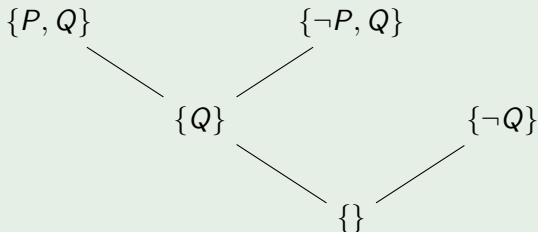


Beispiel (Resolution zum Vergleich)

Matrix:

$$\begin{array}{ccc} P & \neg P & \\ Q & Q & \neg Q \end{array}$$

Klauseln:



Satz

Jeder Resolutionsbeweis lässt sich Schritt für Schritt mit Konsolution simulieren.

Satz

Jeder Konnektionsbeweis lässt sich Schritt für Schritt mit Konsolution simulieren.

Beweis.

- Beim Zurückziehen des aktiven Pfades ändert sich die aktuelle Pfadmenge nicht.
- Extension des aktiven Pfades $\{L_1, \dots, L_k\}$ zu $\{L_1, \dots, L_k, K\}$:
 - Der Pfad $\{L_1, \dots, L_k, K\}$ der aktuellen Pfadmenge \mathcal{P} wird in der Konnektionsmethode ersetzt durch die Pfade $\{L_1, \dots, L_k, K, J\}$ mit $J \in d_{k+2}$.
 - Bei der Konsolution: Bilde $\mathcal{P}\mathcal{P}_{c_{k+2}}$.
 - Verkürze alle Pfade außer den Pfaden $\{L_1, \dots, L_k, K, J\}$ wieder um das letzte Literal.
 - Eliminiere alle komplementären Pfade $\{L_1, \dots, L_k, K, J\}$. □

Wahrheitswert eines Pfades und einer Pfadmenge

Definition

Sei I eine Interpretation

- Der **Wahrheitswert** p^I eines Pfades p bei I ist definiert als w , wenn es ein $L \in p$ gibt mit $L^I = w$. Dann heißt I ein **Modell** von p . Andernfalls ist p^I definiert als f .
- Der **Wahrheitswert** \mathcal{P}^I einer Pfadmenge \mathcal{P} bei I ist definiert als w , wenn für jedes $p \in \mathcal{P}$ gilt $p^I = w$. Dann heißt I ein **Modell** von \mathcal{P} . Andernfalls ist \mathcal{P}^I definiert als f .

Definition

Sei \mathcal{P} eine Pfadmenge und F eine Formel derart, dass jedes Modell von \mathcal{P} ein Modell von F ist. Dann schreiben wir $\mathcal{P} \models F$.

Lemma

- 1 *Eine Formel F ist genau dann wahr bei einer Interpretation I , wenn jeder Pfad durch ihre Matrix wahr ist bei I .*
- 2 *Jeder komplementäre Pfad ist wahr bei jeder Interpretation.*
- 3 *Wenn $p^I = w$ und $p \subset q$, dann $q^I = w$.*

Bemerkung

Bei der Konnektionsmethode wird jeder Pfad durch die Matrix auf Komplementarität überprüft und damit versucht, die Allgemeingültigkeit von F nachzuweisen.

Lemma

Sei \mathcal{P} aktuelle Pfadmenge eines versuchten Konnektionsbeweises für eine Formel F . Dann gilt $\mathcal{P} \models F$.

Beweis.

- Sei I ein Modell von \mathcal{P} . Zu beweisen $F^I = w$.
- Nach dem vorigen Lemma, 1. genügt es, für jeden Pfad q durch die Matrix von F zu zeigen $q^I = w$.
- Sei q ein Pfad durch die Matrix von F .
- Wenn q bereits auf Komplementarität überprüft worden ist, so gilt $q^I = w$ nach dem vorigen Lemma, 2.
- Andernfalls gibt es nach Voraussetzung ein $p \in \mathcal{P}$ mit $p \subset q$.
- Da I ein Modell von \mathcal{P} ist, ist $p^I = w$.
- Nach dem vorigen Lemma, 3. ist $q^I = w$. □

Lemma

Sei F eine Formel mit Matrix M .

- 1 Für jede Klausel $c \in M$ gilt $\mathcal{P}_c \models F$.
- 2 Wenn \mathcal{P} und \mathcal{Q} Pfadmengen sind mit $\mathcal{P} \models F$ und $\mathcal{Q} \models F$, dann gilt $\mathcal{P}\mathcal{Q} \models F$.

Beweis.

- 1 Wenn $\mathcal{P}'_c = w$, dann ist $L' = w$ für alle $L \in c$.
- 2 Angenommen, $F' = f$. Dann gibt es $p \in \mathcal{P}$ mit $p' = f$ und $q \in \mathcal{Q}$ mit $q' = f$. Dann ist $p \cup q \in \mathcal{P}\mathcal{Q}$ und $(p \cup q)' = f$. \square