

# Konsolution

## Beobachtung

Die Konnektionsmethode beruht auf der Tatsache, dass eine Formel semantisch äquivalent ist zu einer Konjunktion von Disjunktionen von Literalen, wobei jede der Disjunktionen einem Pfad  $p$  durch die Matrix entspricht.

## Definition

- Ein **Pfad** schlechthin ist eine endliche Menge von Literalen. (Stellt eine Disjunktion von Literalen dar.)
- Eine **Pfadmenge** ist eine endliche Menge von Pfaden. (Stellt eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen dar.)

# Aktuelle Pfadmenge in der Konnektionsmethode

## Definition

Eine Pfadmenge  $\mathcal{P}$  heißt **aktuelle Pfadmenge** während eines versuchten Konnektionsbeweises einer Formel  $F$ , wenn die noch auf Komplementarität zu überprüfenden Pfade genau die Fortsetzungen der Pfade aus  $\mathcal{P}$  durch die Matrix von  $F$  sind.

## Beispiel

|     |          |          |          |
|-----|----------|----------|----------|
| $P$ | $\neg P$ | $\neg Q$ |          |
| $Q$ | $Q$      | $R$      | $\neg R$ |
|     | $R$      |          |          |
| 1   | 2        | 3        |          |

Aktuelle Pfadmenge  $\mathcal{P} = \{\{P, Q, R\}, \{P, R\}, \{Q\}\}$ .

# Aktuelle Pfadmenge in der Konnektionsmethode

## Notation

Für eine Klausel  $c$  sei  $\mathcal{P}_c := \{\{L\} \mid L \in c\}$ .

## Bemerkung

Am Anfang eines Konnektionsbeweises ist  $\mathcal{P}_c$  aktuelle Pfadmenge für eine beliebige Klausel  $c$  der Matrix.

## Bemerkung

Während eines Versuches eines Konnektionsbeweises ist jeder nichtkomplementäre Pfad durch die Matrix eine Obermenge eines Pfades aus der aktuellen Pfadmenge.

## Definition

Für zwei Pfadmengen  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{Q}$  sei  
 $\mathcal{P}\mathcal{Q} := \{p \cup q \mid p \in \mathcal{P} \text{ und } q \in \mathcal{Q}\}.$

## Lemma

*Wenn jeder nichtkomplementäre Pfad durch eine Matrix  $M$  eine Obermenge eines Pfades aus einer Pfadmenge  $\mathcal{P}$  und eine Obermenge eines Pfades aus einer Pfadmenge  $\mathcal{Q}$  ist, dann ist er auch eine Obermenge eines Pfades aus  $\mathcal{P}\mathcal{Q}$ .*

## Die Vereinfachungsregeln für Pfadmengen

- Komplementäre Pfade dürfen aus einer Pfadmenge entfernt werden.
- Pfade in einer Pfadmenge dürfen gekürzt werden, d.h. ein Pfad  $q$  darf durch  $p$  ersetzt werden, wenn  $p \subset q$  ist.

## Die Konsolutionsregel

$$\frac{\mathcal{P} \quad \mathcal{Q}}{\mathcal{R}},$$

wenn  $\mathcal{R}$  aus  $\mathcal{P}\mathcal{Q}$  durch Vereinfachung entsteht.

$\mathcal{R}$  heißt **Konsolvente** von  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{Q}$ .

## Definition

Ein **Konsolutionsbeweis** einer Matrix  $M$  ist eine endliche Folge  $(\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_n)$  von Pfadmengen derart, dass gilt

- Jedes  $\mathcal{P}_k$  ist ein  $\mathcal{P}_c$  mit  $c \in M$  oder ist Konsolvente zweier Pfadmengen  $\mathcal{P}_i$  und  $\mathcal{P}_j$  mit  $i, j < k$ .
- $\mathcal{P}_n = \{\}$ .

## Bemerkung

Ein Konsolutionsbeweis kann als Baum dargestellt werden.

## Beispiel (nur mit Elimination komplementärer Pfade)

Matrix:

$$\begin{array}{ccc} \cancel{P} & \neg P & \\ \cancel{Q} & Q & \neg Q \end{array}$$

Pfadmengen:

$$\{\{P\}, \{Q\}\}$$

## Beispiel (nur mit Elimination komplementärer Pfade)

Matrix:

$$\begin{array}{ccc} P & \cancel{\neg P} & \\ Q & \cancel{Q} & \neg Q \end{array}$$

Pfadmengen:

$$\{\{P\}, \{Q\}\}$$

$$\{\{\neg P\}, \{Q\}\}$$

## Beispiel (nur mit Elimination komplementärer Pfade)

Matrix:

$$\begin{array}{ccc} P & \neg P & \text{---} \neg Q \\ Q & Q & \end{array}$$

Pfadmengen:

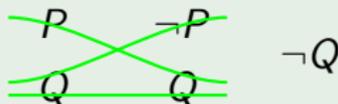
$$\{\{P\}, \{Q\}\}$$

$$\{\{\neg P\}, \{Q\}\}$$

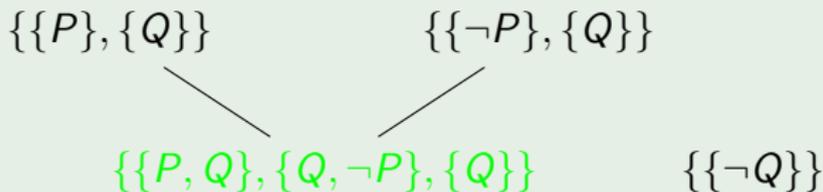
$$\{\{\neg Q\}\}$$

## Beispiel (nur mit Elimination komplementärer Pfade)

Matrix:



Pfadmengen:

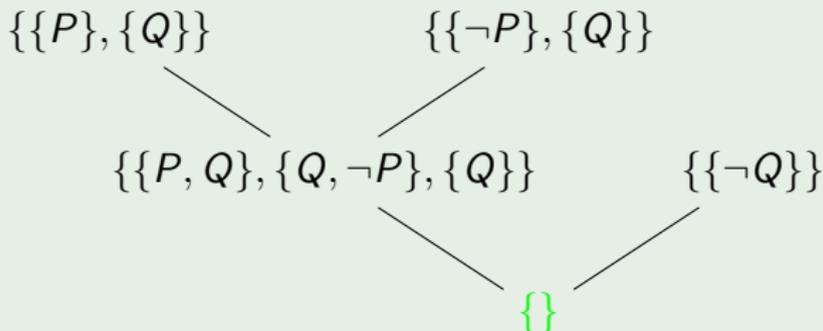


## Beispiel (nur mit Elimination komplementärer Pfade)

Matrix:

$$\begin{array}{ccc} P & \neg P & \neg Q \\ Q & Q & \neg Q \end{array}$$

Pfadmengen:



## Beispiel (mit voller Vereinfachung)

Matrix:

$$\begin{array}{ccc} \cancel{P} & \neg P & \\ \cancel{Q} & Q & \neg Q \end{array}$$

Pfadmengen:

$$\{\{P\}, \{Q\}\}$$

## Beispiel (mit voller Vereinfachung)

Matrix:

$$\begin{array}{ccc} P & \cancel{\neg P} & \\ Q & \cancel{Q} & \neg Q \end{array}$$

Pfadmengen:

$$\{\{P\}, \{Q\}\}$$

$$\{\{\neg P\}, \{Q\}\}$$

## Beispiel (mit voller Vereinfachung)

Matrix:

$$\begin{array}{ccc} P & \neg P & \neg Q \\ Q & Q & \neg Q \end{array}$$

Pfadmengen:

$$\{\{P\}, \{Q\}\}$$

$$\{\{\neg P\}, \{Q\}\}$$

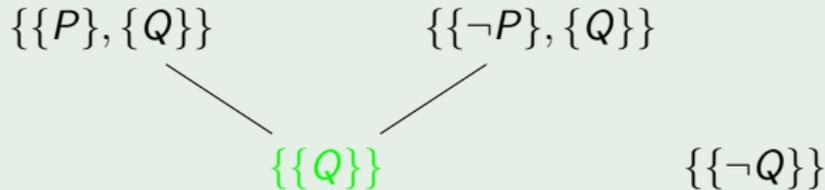
$$\{\{\neg Q\}\}$$

## Beispiel (mit voller Vereinfachung)

Matrix:

$$\begin{array}{ccc} P & \neg P & \neg Q \\ \hline Q & Q & \neg Q \end{array}$$

Pfadmengen:

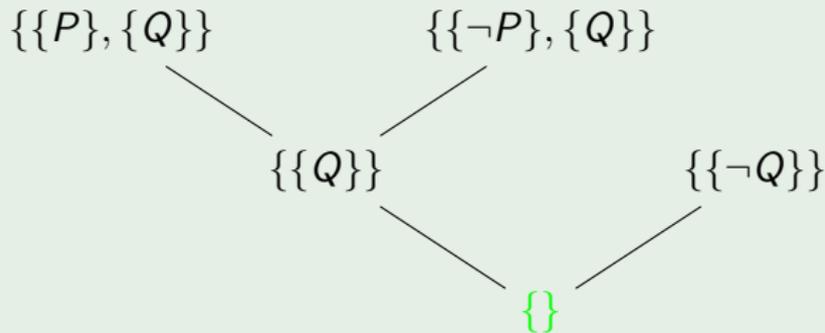


## Beispiel (mit voller Vereinfachung)

Matrix:

$$\begin{array}{ccc} P & \neg P & \neg Q \\ Q & Q & \neg Q \end{array}$$

Pfadmengen:

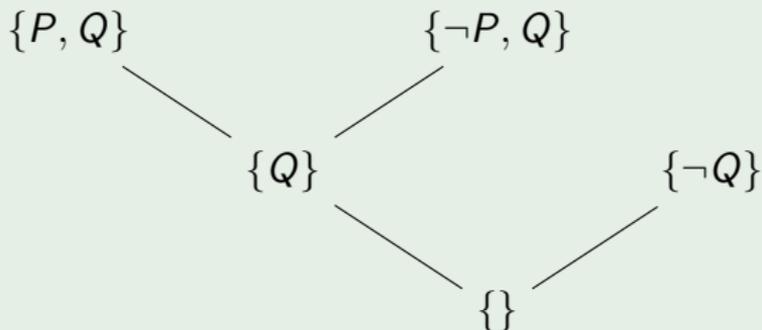


## Beispiel (Resolution zum Vergleich)

Matrix:

$$\begin{array}{ccc} P & \neg P & \neg Q \\ Q & Q & \neg Q \end{array}$$

Klauseln:



## Satz

*Jeder Resolutionsbeweis lässt sich Schritt für Schritt mit Konsolution simulieren.*

## Satz

*Jeder Konnektionsbeweis lässt sich Schritt für Schritt mit Konsolution simulieren.*

## Beweis.

- Beim Zurückziehen des aktiven Pfades ändert sich die aktuelle Pfadmenge nicht.
- Extension des aktiven Pfades  $\{L_1, \dots, L_k\}$  zu  $\{L_1, \dots, L_k, K\}$ :
  - Der Pfad  $\{L_1, \dots, L_k, K\}$  der aktuellen Pfadmenge  $\mathcal{P}$  wird in der Konnektionsmethode ersetzt durch die Pfade  $\{L_1, \dots, L_k, K, J\}$  mit  $J \in d_{k+2}$ .
  - Bei der Konsolution: Bilde  $\mathcal{P}\mathcal{P}_{c_{k+2}}$ .
  - Verkürze alle Pfade außer den Pfaden  $\{L_1, \dots, L_k, K, J\}$  wieder um das letzte Literal.
  - Eliminiere alle komplementären Pfade  $\{L_1, \dots, L_k, K, J\}$ . □

# Wahrheitswert eines Pfades und einer Pfadmenge

## Definition

Sei  $I$  eine Interpretation

- Der **Wahrheitswert**  $p^I$  eines Pfades  $p$  bei  $I$  ist definiert als  $w$ , wenn es ein  $L \in p$  gibt mit  $L^I = w$ . Dann heißt  $I$  ein **Modell** von  $p$ . Andernfalls ist  $p^I$  definiert als  $f$ .
- Der **Wahrheitswert**  $\mathcal{P}^I$  einer Pfadmenge  $\mathcal{P}$  bei  $I$  ist definiert als  $w$ , wenn für jedes  $p \in \mathcal{P}$  gilt  $p^I = w$ . Dann heißt  $I$  ein **Modell** von  $\mathcal{P}$ . Andernfalls ist  $\mathcal{P}^I$  definiert als  $f$ .

## Definition

Sei  $\mathcal{P}$  eine Pfadmenge und  $F$  eine Formel derart, dass jedes Modell von  $\mathcal{P}$  ein Modell von  $F$  ist. Dann schreiben wir  $\mathcal{P} \models F$ .

## Lemma

- 1 *Eine Formel  $F$  ist genau dann wahr bei einer Interpretation  $I$ , wenn jeder Pfad durch ihre Matrix wahr ist bei  $I$ .*
- 2 *Jeder komplementäre Pfad ist wahr bei jeder Interpretation.*
- 3 *Wenn  $p^I = w$  und  $p \subset q$ , dann  $q^I = w$ .*

## Bemerkung

Bei der Konnektionsmethode wird jeder Pfad durch die Matrix auf Komplementarität überprüft und damit versucht, die Allgemeingültigkeit von  $F$  nachzuweisen.

## Lemma

Sei  $\mathcal{P}$  aktuelle Pfadmenge eines versuchten Konnektionsbeweises für eine Formel  $F$ . Dann gilt  $\mathcal{P} \models F$ .

## Beweis.

- Sei  $I$  ein Modell von  $\mathcal{P}$ . Zu beweisen  $F^I = w$ .
- Nach dem vorigen Lemma, 1. genügt es, für jeden Pfad  $q$  durch die Matrix von  $F$  zu zeigen  $q^I = w$ .
- Sei  $q$  ein Pfad durch die Matrix von  $F$ .
- Wenn  $q$  bereits auf Komplementarität überprüft worden ist, so gilt  $q^I = w$  nach dem vorigen Lemma, 2.
- Andernfalls gibt es nach Voraussetzung ein  $p \in \mathcal{P}$  mit  $p \subset q$ .
- Da  $I$  ein Modell von  $\mathcal{P}$  ist, ist  $p^I = w$ .
- Nach dem vorigen Lemma, 3. ist  $q^I = w$ . □

## Lemma

Sei  $F$  eine Formel mit Matrix  $M$ .

- 1 Für jede Klausel  $c \in M$  gilt  $\mathcal{P}_c \models F$ .
- 2 Wenn  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{Q}$  Pfadmengen sind mit  $\mathcal{P} \models F$  und  $\mathcal{Q} \models F$ , dann gilt  $\mathcal{P}\mathcal{Q} \models F$ .

## Beweis.

- 1 Wenn  $\mathcal{P}_c^l = w$ , dann ist  $L^l = w$  für alle  $L \in c$ .
- 2 Angenommen,  $F^l = f$ . Dann gibt es  $p \in \mathcal{P}$  mit  $p^l = f$  und  $q \in \mathcal{Q}$  mit  $q^l = f$ . Dann ist  $p \cup q \in \mathcal{P}\mathcal{Q}$  und  $(p \cup q)^l = f$ .  $\square$