Konsolution

Rückblick auf die Konnektionsmethode

Beobachtung

Die Konnektionsmethode beruht auf der Tatsache, dass eine Formel semantisch äquivalent ist zu einer Konjunktion von Disjunktionen von Literalen, wobei jede der Disjunktionen einem Pfad p durch die Matrix entspricht.

Definition

- Ein Pfad schlechthin ist eine endliche Menge von Literalen. (Stellt eine Disjunktion von Literalen dar.)
- Eine Pfadmenge ist eine endliche Menge von Pfaden. (Stellt eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen dar.)

Aktuelle Pfadmenge in der Konnektionsmethode

Definition

Eine Pfadmenge $\mathcal{P}$ heißt aktuelle Pfadmenge während eines versuchten Konnektionsbeweises einer Formel F, wenn die noch auf Komplementarität zu überprüfenden Pfade genau die Fortsetzungen der Pfade aus $\mathcal{P}$ durch die Matrix von F sind.

Beispiel

1	2	3	
	$\neg P$		
P	Q	$\neg Q$	$\neg R$
Q	R	R	

Aktuelle Pfadmenge $\mathcal{P} = \{\{P, Q, R\}, \{P, R\}, \{Q\}\}$.

Aktuelle Pfadmenge in der Konnektionsmethode

Notation

Für eine Klausel c sei $\mathcal{P}_c := \{\{L\} \mid L \in c\}$.

Bemerkung

Am Anfang eines Konnektionsbeweises ist $\mathcal{P}_c$ aktuelle Pfadmenge für eine beliebige Klausel c der Matrix.

Bemerkung

Während eines Versuches eines Konnektionsbeweises ist jeder nichtkomplementäre Pfad durch die Matrix eine Obermenge eines Pfades aus der aktuellen Pfadmenge.

Pfadmengen

Definition

Für zwei Pfadmengen $\mathcal{P}$ und $\mathcal{Q}$ sei
$\mathcal{P}\mathcal{Q} := \{p \cup q \mid p \in \mathcal{P} \text{ und } q \in \mathcal{Q}\}$.

Lemma

Wenn jeder nichtkomplementäre Pfad durch eine Matrix M eine Obermenge eines Pfades aus einer Pfadmenge $\mathcal{P}$ und eine Obermenge eines Pfades aus einer Pfadmenge $\mathcal{Q}$ ist, dann ist er auch eine Obermenge eines Pfades aus $\mathcal{P}\mathcal{Q}$.

Die Konsolution

Die Vereinfachungsregeln für Pfadmengen

- Komplementäre Pfade dürfen aus einer Pfadmenge entfernt werden.
- Pfade in einer Pfadmenge dürfen gekürzt werden, d.h. ein Pfad q darf durch p ersetzt werden, wenn $p \subset q$ ist.

Die Konsolutionsregel

$$\frac{\mathcal{P} \qquad \mathcal{Q}}{\mathcal{R}},$$

wenn $\mathcal{R}$ aus $\mathcal{P}\mathcal{Q}$ durch Vereinfachung entsteht.
$\mathcal{R}$ heißt Konsolvente von $\mathcal{P}$ und $\mathcal{Q}$.

Konsolutionsbeweis

Definition

Ein Konsolutionsbeweis einer Matrix M ist eine endliche Folge $(\mathcal{P}_0, \ldots, \mathcal{P}_n)$ von Pfadmengen derart, dass gilt

- Jedes $\mathcal{P}_k$ ist ein $\mathcal{P}_c$ mit $c \in M$ oder ist Konsolvente zweier Pfadmengen $\mathcal{P}_i$ und $\mathcal{P}_j$ mit $i, j < k$.
- $\mathcal{P}_n = \{\}$.

Bemerkung

Ein Konsolutionsbeweis kann als Baum dargestellt werden.

Beispiel (nur mit Elimination komplementärer Pfade)

Matrix:

$$\begin{matrix} \cancel{P} & \neg P & \\ & & \neg Q \\ \cancel{Q} & Q & \end{matrix}$$

Pfadmengen:

$$\{\{P\},\{Q\}\}$$

Die Konsolution

Beispiel (nur mit Elimination komplementärer Pfade)

Matrix:

$$\begin{array}{ccc} P & \cancel{\neg P} & \\ & & \neg Q \\ Q & \cancel{Q} & \end{array}$$

Pfadmengen:

$$\{\{P\},\{Q\}\} \qquad \{\{\neg P\},\{Q\}\}$$

Beispiel (nur mit Elimination komplementärer Pfade)

Matrix:

$$\begin{array}{ccc} P & \neg P & \\ & & \cancel{\neg Q} \\ Q & Q & \end{array}$$

Pfadmengen:

$$\{\{P\},\{Q\}\} \qquad \{\{\neg P\},\{Q\}\}$$

$$\{\{\neg Q\}\}$$

Die Konsolution

Beispiel (nur mit Elimination komplementärer Pfade)

Matrix:

$$\begin{array}{ccc} P & \neg P & \\ & & \neg Q \\ Q & Q & \end{array}$$

Pfadmengen:

$\{\{P\}, \{Q\}\}$ $\qquad$ $\{\{\neg P\}, \{Q\}\}$

$\{\{P, Q\}, \{Q, \neg P\}, \{Q\}\}$ $\qquad$ $\{\{\neg Q\}\}$

Die Konsolution

Beispiel (nur mit Elimination komplementärer Pfade)

Matrix:

$$\begin{matrix} P & \neg P & \\ & & \neg Q \\ Q & Q & \end{matrix}$$

Pfadmengen:

$$\{\{P\},\{Q\}\} \qquad \{\{\neg P\},\{Q\}\}$$

$$\{\{P,Q\},\{Q,\neg P\},\{Q\}\} \qquad \{\{\neg Q\}\}$$

$$\{\}$$

Die Konsolution

Beispiel (mit voller Vereinfachung)

Matrix:

$$\begin{matrix} \cancel{P} & \neg P & \\ & & \neg Q \\ \cancel{Q} & Q & \end{matrix}$$

Pfadmengen:

$$\{\{P\}, \{Q\}\}$$

Die Konsolution

Beispiel (mit voller Vereinfachung)

Matrix:

$$\begin{matrix} P & \cancel{\neg P} & \\ & & \neg Q \\ Q & \cancel{Q} & \end{matrix}$$

Pfadmengen:

$$\{\{P\}, \{Q\}\} \qquad \{\{\neg P\}, \{Q\}\}$$

Beispiel (mit voller Vereinfachung)

Matrix:

$$\begin{matrix} P & \neg P & \\ Q & Q & \cancel{\neg Q} \end{matrix}$$

Pfadmengen:

$$\{\{P\},\{Q\}\} \qquad \{\{\neg P\},\{Q\}\}$$

$$\{\{\neg Q\}\}$$

Die Konsolution

Beispiel (mit voller Vereinfachung)

Matrix:

$$\begin{array}{ccc} P & \neg P & \\ \cancel{Q} & \cancel{Q} & \neg Q \end{array}$$

Pfadmengen:

$$\{\{P\},\{Q\}\} \qquad \{\{\neg P\},\{Q\}\}$$

$$\{\{Q\}\} \qquad \{\{\neg Q\}\}$$

Die Konsolution

Beispiel (mit voller Vereinfachung)

Matrix:

$$\begin{matrix} P & \neg P & \\ & & \neg Q \\ Q & Q & \end{matrix}$$

Pfadmengen:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\{\{P\},\{Q\}\} \arrow[dr, no head] & & \{\{\neg P\},\{Q\}\} \arrow[dl, no head] & \\
& \{\{Q\}\} \arrow[dr, no head] & & \{\{\neg Q\}\} \arrow[dl, no head] \\
& & \{\} &
\end{tikzcd}$$

Beispiel (Resolution zum Vergleich)

Matrix:

$$\begin{array}{ccc} P & \neg P & \\ & & \neg Q \\ Q & Q & \end{array}$$

Klauseln:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \{P, Q\} \arrow[dr, dash] & & \{\neg P, Q\} \arrow[dl, dash] & & \\ & \{Q\} \arrow[dr, dash] & & \{\neg Q\} \arrow[dl, dash] \\ & & \{\} & \end{tikzcd}$$

Simulation

Satz

Jeder Resolutionsbeweis lässt sich Schritt für Schritt mit Konsolution simulieren.

Satz

Jeder Konnektionsbeweis lässt sich Schritt für Schritt mit Konsolution simulieren.

Beweis.

- Beim Zurückziehen des aktiven Pfades ändert sich die aktuelle Pfadmenge nicht.
- Extension des aktiven Pfades $\{L_1, \ldots, L_k\}$ zu $\{L_1, \ldots, L_k, K\}$:
  - Der Pfad $\{L_1, \ldots, L_k, K\}$ der aktuellen Pfadmenge $\mathcal{P}$ wird in der Konnektionsmethode ersetzt durch die Pfade $\{L_1, \ldots, L_k, K, J\}$ mit $J \in d_{k+2}$.
  - Bei der Konsolution: Bilde $\mathcal{PP}_{c_{k+2}}$.
  - Verkürze alle Pfade außer den Pfaden $\{L_1, \ldots, L_k, K, J\}$ wieder um das letzte Literal.
  - Eliminiere alle komplementären Pfade $\{L_1, \ldots, L_k, K, J\}$. $\square$

Wahrheitswert eines Pfades und einer Pfadmenge

Definition

Sei I eine Interpretation

- Der Wahrheitswert p^I eines Pfades p bei I ist definiert als w, wenn es ein $L \in p$ gibt mit $L^I = $ w. Dann heißt I ein Modell von p. Andernfalls ist p^I definiert als f.
- Der Wahrheitswert $\mathcal{P}^I$ einer Pfadmenge $\mathcal{P}$ bei I ist definiert als w, wenn für jedes $p \in \mathcal{P}$ gilt $p^I = $ w. Dann heißt I ein Modell von $\mathcal{P}$. Andernfalls ist $\mathcal{P}^I$ definiert als f.

Definition

Sei $\mathcal{P}$ eine Pfadmenge und F eine Formel derart, dass jedes Modell von $\mathcal{P}$ ein Modell von F ist. Dann schreiben wir $\mathcal{P} \models F$.

Pfadmengen in der Konnektionsmethode

Lemma

1. *Eine Formel F ist genau dann wahr bei einer Interpretation I, wenn jeder Pfad durch ihre Matrix wahr ist bei I.*
2. *Jeder komplementäre Pfad ist wahr bei jeder Interpretation.*
3. *Wenn $p^I = \mathrm{w}$ und $p \subset q$, dann $q^I = \mathrm{w}$.*

Bemerkung

Bei der Konnektionsmethode wird jeder Pfad durch die Matrix auf Komplementarität überprüft und damit versucht, die Allgemeingültigkeit von F nachzuweisen.

Pfadmengen in der Konnektionsmethode

Lemma

Sei $\mathcal{P}$ aktuelle Pfadmenge eines versuchten Konnektionsbeweises für eine Formel F. Dann gilt $\mathcal{P} \models F$.

Beweis.

- Sei I ein Modell von $\mathcal{P}$. Zu beweisen $F^I = \mathrm{w}$.
- Nach dem vorigen Lemma, 1. genügt es, für jeden Pfad q durch die Matrix von F zu zeigen $q^I = \mathrm{w}$.
- Sei q ein Pfad durch die Matrix von F.
- Wenn q bereits auf Komplementarität überprüft worden ist, so gilt $q^I = \mathrm{w}$ nach dem vorigen Lemma, 2.
- Andernfalls gibt es nach Voraussetzung ein $p \in \mathcal{P}$ mit $p \subset q$.
- Da I ein Modell von $\mathcal{P}$ ist, ist $p^I = \mathrm{w}$.
- Nach dem vorigen Lemma, 3. ist $q^I = \mathrm{w}$. $\square$

Pfadmengen

Lemma

Sei F eine Formel mit Matrix M.

1. *Für jede Klausel $c \in M$ gilt $\mathcal{P}_c \models F$.*
2. *Wenn $\mathcal{P}$ und $\mathcal{Q}$ Pfadmengen sind mit $\mathcal{P} \models F$ und $\mathcal{Q} \models F$, dann gilt $\mathcal{P}\mathcal{Q} \models F$.*

Beweis.

1. Wenn $\mathcal{P}_c^I = \text{w}$, dann ist $L^I = \text{w}$ für alle $L \in c$.
2. Angenommen, $F^I = \text{f}$. Dann gibt es $p \in \mathcal{P}$ mit $p^I = \text{f}$ und $q \in \mathcal{Q}$ mit $q^I = \text{f}$. Dann ist $p \cup q \in \mathcal{P}\mathcal{Q}$ und $(p \cup q)^I = \text{f}$. $\square$