Hausaufgaben
Automatisches Beweisen

Elmar Eder

16. Januar 2019

Aufgabe 1 Welche der folgenden aussagenlogischen Formeln sind allgemeingültig, welche erfüllbar? Verwenden Sie die Methode der Wahrheitswerttabellen, um jeweils alle Modelle der Formel sowie alle Modelle ihrer Negation zu bestimmen!

$$U \vee \neg V$$
$$U \wedge \neg U$$
$$U \vee (V \wedge \neg U)$$
$$U \vee (V \vee \neg U)$$
$$U \vee V$$
$$(U \vee V) \vee (\neg U \wedge \neg V)$$

Aufgabe 2 Schreiben Sie ein Computerprogramm zur Entscheidung, ob eine aussagenlogische Formel allgemeingültig / erfüllbar / unerfüllbar ist! Hierzu müssen Sie sich zunächst eine Datenstruktur zur Darstellung von Formeln überlegen.

Aufgabe 3 Sei F eine aussagenlogische Formel. Beweisen Sie

(a) F ist allgemeingültig $\iff$ $\neg F$ ist unerfüllbar.

(b) F ist unerfüllbar $\iff$ $\neg F$ ist allgemeingültig.

Aufgabe 4 Sei S eine Menge von aussagenlogischen Formeln und sei F eine aussagenlogische Formel. Beweisen Sie

$$S \models F \iff S \cup \{\neg F\} \text{ ist unerfüllbar.}$$

Aufgabe 5 Beweisen Sie, dass es zu jeder aussagenlogischen Formel F eine aussagenlogische Formel F' in disjunktiver Normalform gibt mit $F \sim F'$, indem Sie F schrittweise mit den DeMorgan'schen Regeln, der Regel der doppelten Negation und einem der Distributivgesetze umwandeln!

Aufgabe 6 Beweisen Sie, dass es zu jeder aussagenlogischen Formel F eine aussagenlogische Formel F' in disjunktiver Normalform gibt mit $F \sim F'$, indem Sie aus der Wahrheitswerttabelle für die Formel F diejenigen Zeilen betrachten, für die die Formel F den Wahrheitswert `w` hat und aus jeder solchen Zeile eine Konjunktion von Literalen konstruieren!

Aufgabe 7 Leiten Sie mit der Resolutions-Regel die leere Klausel aus der Klauselmenge $\{\{\neg U\}, \{U, V\}, \{\neg V\}\}$ ab!

Aufgabe 8 Für Aussagensymbole P, Q und R leiten Sie mit der Resolutionsregel die leere Klausel aus der Klauselmenge $\{\{P, \neg Q, \neg R\}, \{Q, \neg R\}, \{R\}, \{\neg P\}\}$ ab! Zeichnen Sie den Ableitungsbaum zu Ihrer Ableitung! Schreiben Sie die obige Klauselmenge um in ein Prolog-Progamm samt zugehöriger Anfrage! In Prolog müssen Sie dabei die Aussagensymbole klein schreiben. Lassen Sie dieses Programm in Prolog laufen!

Aufgabe 9 Schreiben Sie ein Prolog-Programm für die Multiplikation zweier natürlicher Zahlen in der Darstellung $f(\dots f(0)\dots)$ und berechnen Sie damit $2 \cdot 3$, indem Sie Ihr Programm mit der entsprechenden Anfrage in Prolog laufen lassen! Schreiben Sie Ihr Programm um als prädikatenlogische Formel! Überlegen Sie sich, welche prädikatenlogische Formel Prolog bewiesen hat und welche prädikatenlogische Formel Prolog widerlegt hat, also als unerfüllbar nachgewiesen hat!

Aufgabe 10 Im Bild in der Datei `tafelfotos/IMG_20181107_161640.jpg` wird der Begriff der zu einer aussagenlogischen Formel F *dualen Formel* F_{dual} definiert. Geben Sie eine induktive Definition des Begriffs der dualen Formel an!

Aufgabe 11 Zeigen Sie, dass für jede aussagenlogische Formel F gilt

$$\begin{aligned} F \text{ ist allgemeingültig} &\iff F_{\text{dual}} \text{ ist unerfüllbar} \\ F \text{ ist unerfüllbar} &\iff F_{\text{dual}} \text{ ist allgemeingültig} \end{aligned}$$

Aufgabe 12 Überlegen Sie sich eine Datenstruktur zur Darstellung aussagenlogischer Formeln als Prologterme und geben Sie eine induktive Definition für den Begriff einer so dargestellten Formel! Tun Sie das zunächst mit der kanonischen Termschreibweise, bei der ein zusammengesetzter Prologterm stets als $f(t_1, \dots, t_n)$ geschrieben wird! Eine zusammengesetzte Formel könnte zum Beispiel als `nicht(`F`)` oder als `und(`F`,`G`)` dargestellt sein, wobei F bzw. F und G die unmittelbaren Teilformeln sind.

Aufgabe 13 Schreiben Sie ein Prologprogramm, das von einem Prologterm testen kann, ob er eine Formel gemäß der vorigen Aufgabe darstellt!

Aufgabe 14 Verwenden Sie nun statt der kanonischen Termschreibweise eine Präfix- und Infixschreibweise! Eine zusammengesetzte Formel könnte zum Beispiel als `nicht` F

oder als F `und` G dargestellt sein, wobei F bzw. F und G die unmittelbaren Teilformeln sind. Geben Sie wieder die induktive Definion an! Schreiben Sie ein Prologprogramm, das von einem Prologterm testen kann, ob er gemäß dieser Definition eine Formel darstellt!

Aufgabe 15 Schreiben Sie ein Prologprogramm zur Berechnung der dualen Formel zu einer Formel in der Darstellung gemäß der vorigen Aufgabe!

Aufgabe 16 Schreiben Sie ein Prologprogramm zur Verwandlung einer aussagenlogischen Formel in DNF!

Aufgabe 17 Unifizieren Sie die Terme $f(A, B, C)$ und $f(g(B, B), g(C, C), g(D, D))$ mit dem Unifikationsalgorithmus der Vorlesung! Geben Sie dabei den Ablauf des Algorithmus an, wie es im Beispiel aus der Vorlesung gezeigt wurde! Kennzeichnen Sie dabei jeweils die Nichtübereinstimmungsmenge durch rote Farbe oder Unterstreichung!

Aufgabe 18 Geben Sie mehrere Beispiele an für Terme s und t, sodass

(a) s und t unifizierbar sind!

(b) s und t nicht unifizierbar sind und der Unifikationsalgorithmus einen Clash signalisiert!

(c) s und t nicht unifizierbar sind und der Unifikationsalgorithmus einen Cycle signalisiert!

Geben Sie dabei jeweils den Ablauf des Algorithmus an!

Aufgabe 19 Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass der Unifikationsalgorithmus immer terminiert!

Aufgabe 20 Bestimmen Sie die Resolvente der Klauseln $\{\neg\mathrm{mul}(\mathrm{f}(\mathrm{f}(0)), \mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathrm{f}(0))), \mathrm{X})\}$ und $\{\mathrm{mul}(\mathrm{X}, \mathrm{f}(\mathrm{Y}), \mathrm{P}), \neg\mathrm{mul}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Q}), \neg\mathrm{add}(\mathrm{Q}, \mathrm{X}, \mathrm{P})\}$!

(a) Benennen Sie dazu zunächst in der Programmklausel zumindest die Variable um, die auch in der anderen Klausel vorkommt! Geben Sie die neue Variante der Programmklausel an!

(b) Unifizieren Sie dann das Ziel in der Zielklausel mit dem Kopf der Programmklausel! Geben Sie dabei wieder den Ablauf des Unifikationsalgorithmus an!

(c) Ersetzen Sie die Variablen in beiden Klauseln mittels der Substitution, die der Unfikationsalgorithmus als mgu geliefert hat! Geben Sie die so erhaltenen Instanzen beider Klauseln an!

(d) Resolvieren Sie nun diese beiden Klauseln wie von der Aussagenlogik gewohnt und geben Sie die Resolvente an!

Aufgabe 21 Betrachten wir die beiden in der vorigen Aufgabe ursprünglich gegebenen Klauseln (die Elternklauseln) sowie die Resolvente.

(a) Schreiben Sie die Elternklauseln und die Resolvente in Prolog-Notation!

(b) Schreiben Sie sie als prädikatenlogische Formeln mit allquantifizierten Variablen!

(c) Zeigen Sie, dass die Formel für die Resolvente semantisch aus den Formeln für die beiden Elternklauseln folgt!

Aufgabe 22 Für zwei Formeln F und G sei $F \to G$ eine Abkürzung für $\neg F \vee G$. Sei F die Formel $P(a) \wedge \forall x(P(x) \to P(f(x)) \to P(f(f(a))$.

(a) Finden Sie zu F eine semantisch äquivalente Formel in Negationsnormalform!
(b) Finden Sie zu F eine semantisch äquivalente Formel in disjunktiver Normalform!
(c) Finden Sie zur Formel $\neg F$ eine semantische äquivalente Formel in konjunktiver Normalform!
(d) Geben Sie die dazugehörige Klauselmenge an!
(e) Geben Sie dazu eine Resolutionswiderlegung als endliche Folge von Klauseln an!
(f) Zeichnene Sie dazu den Ableitungsbaum!

Aufgabe 23 Sei F die Formel $P(a) \wedge \forall x(P(x) \to P(f(x)) \to P(f(f(f(f(a))))$. Tun Sie für diese Formel das gleiche wie in der vorigen Aufgabe! Wieviele Resolutionsschritte benötigen Sie dabei mindestens? Wieviele benötigen Sie mindestens bei der Formel $P(a) \wedge \forall x(P(x) \to P(f(x)) \to P(f(\dots f(a) \dots)$, wenn das f dabei n-fach geschachtelt ist?

Aufgabe 24 Geben Sie zu dem in der Datei `addmul.pl` gebenen Prologprogramm und der darin in der letzten Zeile als Kommentar gegebenen Anfrage die entsprechende Klauselmenge als Menge von Mengen von Literalen an und dazu die prädikatenlogische Formel, die dieser Klauselmenge entspricht! Zeigen Sie die Unerfüllbarkeit dieser Formel, indem Sie eine Resolutionswiderlegung angeben!

Aufgabe 25 Geben Sie zu dem in der Datei `peter.pl` gebenen Prologprogramm und der darin in der letzten Zeile als Kommentar gegebenen Anfrage die entsprechende Klauselmenge als Menge von Mengen von Literalen an und dazu die prädikatenlogische Formel, die dieser Klauselmenge entspricht! Zeigen Sie die Unerfüllbarkeit dieser Formel, indem Sie die Existenz einer Resolutionswiderlegung zeigen. Zeigen Sie aber auch, dass der uns bekannte Teil unseres Universums (Radius zwischen zehn und zwanzig Milliarden Lichtjahre) nicht genug Platz bietet, um diese Widerlegung hinzuschreiben, selbst wenn man als Platzbedarf pro Zeichen nur das Volumen eines Protons (Radius mehrere mal 10^{-16}m) annehmen würde!

Aufgabe 26 Lesen Sie `www-beamer/02_Aussagenlogik.beamer.pdf` und machen Sie davon die Aufgabe 10.2!

Aufgabe 27 Lesen Sie `www-beamer/03_AL_Konn-meth.beamer.pdf` und machen Sie davon die Aufgabe 12!

Aufgabe 28 Lesen Sie `www-beamer/03_AL_Konn-meth.beamer.pdf` und machen Sie davon die Aufgabe 13!

Aufgabe 29 Konstruieren Sie zur Formel

$$\neg(P \wedge (\neg Q \vee (\neg P \wedge R)))$$

(a) mit den Assoziativgesetzen, dem Gesetz der doppelten Negation und den Distributivgesetzen eine semantisch äquvialente Formel in

  (i) DNF

  (ii) KNF

(b) mit der effizienten Normalformtransformation eine

  (i) allgemeingültigkeitsäquivalente (s. `vorlesung.pdf`) Formel in DNF

  (ii) erfüllbarkeitsäquivalente Formel in KNF!

Aufgabe 30 Leiten Sie im Frege-Hilbert-Kalkül $F \to F$ her!

Aufgabe 31 Machen Sie Aufgabe 17 von `07_AL_Tableau.beamer.pdf`!

Aufgabe 32 Machen Sie Aufgabe 18 von `07_AL_Tableau.beamer.pdf`!