Klassische Prädikatenlogik erster Stufe

Grundzeichen

Die Grundzeichen

- abzählbar unendliche viele Variablen
- Funktionszeichen verschiedener Stelligkeiten 0, 1, 2, ...
- Prädikatszeichen verschiedener Stelligkeiten 0, 1, 2, ...
- Junktoren, z.B. $\top$, $\bot$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, ...
- Quantoren $\forall$ und/oder $\exists$
- Interpunktionszeichen (, , und)

Definition

Eine Konstante ist ein nullstelliges Funktionszeichen.

Mitteilungszeichen für Grundzeichen

Mitteilungszeichen (auch mit Indizes, . . .)

- u, v, w, x, y, z, . . . für Variable
- a, b, c, . . . für Konstante
- f, g, h, . . . für Funktionszeichen
- P, Q, R, . . . für Prädikatszeichen

Terme

Definition

Ein Term ist ein Wort über der Menge der Grundzeichen gemäß der folgenden induktiven Definition:

- Jede Variable und jede Konstante ist ein Term.
- Wenn f ein n-stelliges Funktionszeichen ist mit $n > 0$ und $t_1, \ldots, t_n$ Terme sind, so ist $f(t_1, \ldots, t_n)$ ein Term.

Terme

Definition

Ein Term ist ein Wort über der Menge der Grundzeichen gemäß der folgenden induktiven Definition:

- Jede Variable und jede Konstante ist ein Term.
- Wenn f ein n-stelliges Funktionszeichen ist mit $n > 0$ und $t_1, \ldots, t_n$ Terme sind, so ist $f(t_1, \ldots, t_n)$ ein Term.

Vereinbarung

$(t_1, \ldots, t_n)$ soll im Falle $n = 0$ das leere Wort bezeichnen.

Terme

Definition

Ein Term ist ein Wort über der Menge der Grundzeichen gemäß der folgenden induktiven Definition:

- Jede Variable ist ein Term.
- Wenn f ein n-stelliges Funktionszeichen ist und $t_1, \ldots, t_n$ Terme sind, so ist $f(t_1, \ldots, t_n)$ ein Term.

Vereinbarung

$(t_1, \ldots, t_n)$ soll im Falle $n = 0$ das leere Wort bezeichnen.

Terme

Definition

Ein Term ist ein Wort über der Menge der Grundzeichen gemäß der folgenden induktiven Definition:

- Jede Variable ist ein Term.
- Wenn f ein n-stelliges Funktionszeichen ist und $t_1, \ldots, t_n$ Terme sind, so ist $f(t_1, \ldots, t_n)$ ein Term.

Vereinbarung

$(t_1, \ldots, t_n)$ soll im Falle $n = 0$ das leere Wort bezeichnen.

Mitteilungszeichen für Terme

r, s, t

Grundterme

Definition

Eine Grundterm ist ein Term, der keine Variablen enthält.

Formeln

Definition

Eine Formel ist ein Wort über der Menge der Grundzeichen gemäß der folgenden induktiven Definition:

- Wenn P ein n-stelliges Prädikatszeichen ist und $t_1, \ldots, t_n$ Terme sind, so ist $P(t_1, \ldots, t_n)$ eine Formel. Man spricht dann von einer Atomformel.
- $\top$ und $\bot$ sind Formeln,
- Wenn F eine Formel ist, dann auch $\neg F$,
- Wenn F und G Formeln sind, dann auch $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$, $(F \leftrightarrow G)$, $\ldots$,
- Wenn F eine Formel ist und x eine Variable ist, dann sind $\forall x F$ und $\exists x F$ Formeln,

soweit die darin vorkommenden Zeichen Grundzeichen sind.

Mitteilungszeichen für Formeln

$A, B, \ldots, F, G, \ldots$

Definition (Teilformel)

- F ist Teilformel von F.
- Jede Teilformel von F ist Teilformel der Formeln $\neg F$, $\forall x F$ und $\exists x F$,
- Jede Teilformel von F oder von G ist Teilformel der Formeln $\neg F$, $F \wedge G$, $F \vee G$, usw.,

soweit diese Formeln sind.

Freie und gebundene Vorkommen von Variablen in Formeln

Definition

- Sei F eine Formel, die eine Formel $\forall x G$ oder $\exists x G$ als Teilformel enthält. Dann heißt jedes Vorkommen von x in F, das innerhalb dieser Teilformel liegt, ein gebundenes Vorkommen von x in F.
- Ein Vorkommen von x in F, das nicht gebunden ist, heißt frei.
- Eine geschlossene Formel ist eine Formel, die keine freien Vorkommen von Variablen hat.

Freie und gebundene Vorkommen von Variablen in Formeln

Beispiel

In der Formel $\forall x P(x) \vee Q(y)$ sind die beiden Vorkommen von x gebunden und das Vorkommen von y frei. Die Formel ist nicht geschlossen, da y darin frei vorkommt.

Beispiel

In der Formel $\forall y(\forall x P(x, y) \wedge Q(x))$ sind alle Vorkommen von Variablen außer dem letzten Vorkommen von x gebunden. Die Formel ist nicht geschlossen, da x darin frei vorkommt.

Beispiel

In der Formel $\exists x P(x)$ sind beide Vorkommen von x gebunden. Die Formel ist daher geschlossen.

Notation

- Mit $F[x]$ bezeichnen wir eine Formel, in der keine Variable außer x frei vorkommt.
- Wenn t ein Grundterm ist, dann bezeichnen wir mit $F[t]$ die Formel, die aus $F[x]$ entsteht durch Ersetzung aller freien Vorkommen von x durch t.

Interpretationen und Variablenbelegungen

Definition

- Eine Interpretation ist ein Paar $\mathbf{I} = (D, i)$ bestehend aus einer nichtleeren Menge D, dem Individuenbereich (engl. domain), und einer Abbildung i, die jedem n-stelligen Funktionszeichen f eine n-stellige Funktion $i(f)\colon D^n \to D$ und jedem n-stelligen Prädikatszeichen P eine n-stellige Relation $i(P) \subset D^n$ auf D zuordnet.
- Wir schreiben $f^{\mathbf{I}}$ für $i(f)$ und $P^{\mathbf{I}}$ für $i(P)$.

Definition

Eine Variablenbelegung (englisch variable assignment) auf einem Individuenbereich D ist eine Abbildung $\mathbf{A}$ von der Menge der Variablen in den Individuenbereich D.

Wert eines Terms

Definition

Der Wert $t^{\mathbf{IA}} \in D$ eines Terms t bei einer Interpretation $\mathbf{I} = (D, i)$ und einer Variablenbelegung $\mathbf{A}$ ist induktiv definiert durch

- $x^{\mathbf{IA}} := \mathbf{A}(x)$
- $f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathbf{IA}} := f^{\mathbf{I}}(t_1^{\mathbf{IA}}, \ldots, t_n^{\mathbf{IA}})$

Definition

Sei $\mathbf{A}$ eine Variablenbelegung, x eine Variable und $\xi \in D$.
Dann wird die Variablenbelegung $\mathbf{A}_\xi^x$ definiert durch

$$\mathbf{A}_\xi^x(y) := \begin{cases} \xi, & \text{wenn } x \equiv y \\ \mathbf{A}(y) & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle Variablen y.

Wahrheitswert einer Formel

Definition

Der Wahrheitswert $F^{\mathbf{IA}} \in \{\mathrm{w}, \mathrm{f}\}$ einer Formel F bei einer Interpretation **I** und einer Variablenbelegung **A** ist induktiv definiert durch

- $P(t_1, \ldots, t_n)^{\mathbf{IA}} := \begin{cases} \mathrm{w}, & \text{wenn } (t_1^{\mathbf{IA}}, \ldots, t_n^{\mathbf{IA}}) \in P^{\mathbf{I}} \\ \mathrm{f} & \text{sonst} \end{cases}$
- $\top^{\mathbf{IA}} := \mathrm{w}$ und $\bot^{\mathbf{IA}} := \mathrm{f}$.
- $(\neg F)^{\mathbf{IA}} := \neg\, F^{\mathbf{IA}}$
- $(F \wedge G)^{\mathbf{IA}} := F^{\mathbf{IA}} \wedge G^{\mathbf{IA}}$
- $(F \vee G)^{\mathbf{IA}} := F^{\mathbf{IA}} \vee G^{\mathbf{IA}}$

$\vdots$

Wahrheitswert einer Formel

Definition (Fortsetzung)

- $(\forall x F)^{\mathbf{IA}} := \begin{cases} \text{w}, & \text{wenn } F^{\mathbf{IA}^x_\xi} = \text{w für alle } \xi \in D \\ \text{f} & \text{sonst} \end{cases}$
- $(\exists x F)^{\mathbf{IA}} := \begin{cases} \text{w}, & \text{wenn es ein } \xi \in D \text{ gibt mit } F^{\mathbf{IA}^x_\xi} = \text{w} \\ \text{f} & \text{sonst} \end{cases}$

Wahrheitswert einer Formel

Satz

Der Wahrheitswert $F^{\mathbf{IA}}$ einer geschlossenen Formel F bei einer Interpretation $\mathbf{I}$ und einer Variablenbelegung $\mathbf{A}$ hängt nicht von der Variablenbelegung ab.

Definition

Man spricht dann auch einfach von dem Wahrheitswert der geschlossenen Formel F bei der Interpretation $\mathbf{I}$ und bezeichnet ihn mit $F^{\mathbf{I}}$.

Semantische Begriffe

Die semantischen Begriffe Allgemeingültigkeit, Erfüllbarkeit, Unerfüllbarkeit, $F \models G$, $F \sim G$, $S \models F$, u.s.w. für geschlossene Formeln F und G und für Mengen S von geschlossenen Formeln sind analog wie in der Aussagenlogik definiert.