Der Tableaukalkül

Der Tableaukalkül

Der Tableaukalkül

- Ein Kalkül zum Nachweis der Unerfüllbarkeit einer Formel F.
- Idee: Annahme, die Formel wäre wahr.
- Daraus werden neue Formeln als Folgerungen abgeleitet.
- Jede dieser Formeln dient als Knotenmarkierung eines Baumes.
- Bei einer Fallunterscheidung gibt es eine Verzweigung.

Der Tableaukalkül

Beispiel

$$(P \lor Q) \land \neg((P \land \neg Q) \lor Q)$$

Der Tableaukalkül

Beispiel

$$(P \vee Q) \wedge \neg((P \wedge \neg Q) \vee Q)$$

$$|$$

$$P \vee Q$$

Der Tableaukalkül

Beispiel

$$(P \lor Q) \land \neg((P \land \neg Q) \lor Q)$$

$$|$$

$$P \lor Q$$

$$|$$

$$\neg((P \land \neg Q) \lor Q)$$

Der Tableaukalkül

Beispiel

$$\begin{array}{c}
(P \lor Q) \land \neg((P \land \neg Q) \lor Q) \\
| \\
P \lor Q \\
| \\
\neg((P \land \neg Q) \lor Q) \\
| \\
\neg(P \land \neg Q)
\end{array}$$

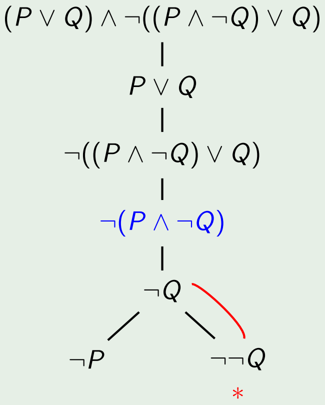
Der Tableaukalkül

Beispiel

$$\begin{array}{c}
(P \vee Q) \wedge \neg((P \wedge \neg Q) \vee Q) \\
| \\
P \vee Q \\
| \\
\neg((P \wedge \neg Q) \vee Q) \\
| \\
\neg(P \wedge \neg Q) \\
| \\
\neg Q
\end{array}$$

Der Tableaukalkül

Beispiel



$$(P \lor Q) \land \neg((P \land \neg Q) \lor Q)$$

$$P \lor Q$$

$$\neg((P \land \neg Q) \lor Q)$$

$$\neg(P \land \neg Q)$$

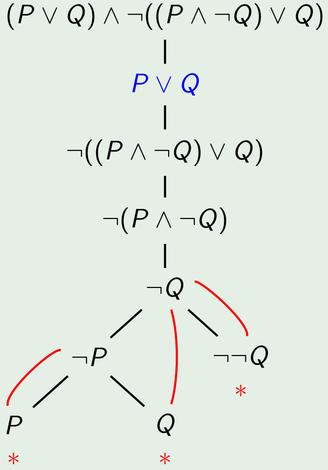
$$\neg Q$$

$$\neg P \qquad \neg\neg Q$$

$$*$$

Der Tableaukalkül

Beispiel



$(P \lor Q) \land \neg((P \land \neg Q) \lor Q)$

$P \lor Q$

$\neg((P \land \neg Q) \lor Q)$

$\neg(P \land \neg Q)$

$\neg Q$

$\neg P$

$\neg\neg Q$

$*$

P

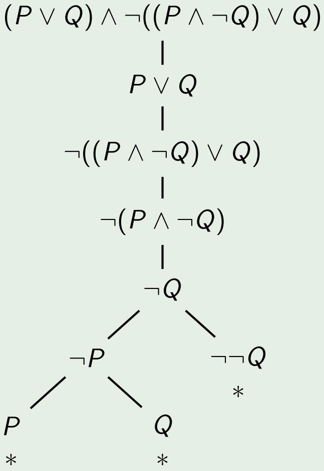
Q

$*$

$*$

Der Tableaukalkül

Beispiel



$(P \vee Q) \wedge \neg((P \wedge \neg Q) \vee Q)$

$P \vee Q$

$\neg((P \wedge \neg Q) \vee Q)$

$\neg(P \wedge \neg Q)$

$\neg Q$

$\neg P$ | $\neg\neg Q$ $*$

P $*$ | Q $*$

α-Formeln und β-Formeln

Definition

Der Begriff der α-Formel α und der β-Formel β sowie der Formeln α_1, α_2, β_1 und β_2 sind gegeben durch die Tabellen

α	α_1	α_2
$F \wedge G$	F	G
$\neg(F \vee G)$	$\neg F$	$\neg G$
$\neg\neg F$	F	F

β	β_1	β_2
$F \vee G$	F	G
$\neg(F \wedge G)$	$\neg F$	$\neg G$

Bemerkung

Jede Formel ist entweder ein Literal oder eine α-Formel oder eine β-Formel.

Tableaux

Definition

Ein Tableau für eine Formel F ist ein Baum T, dessen Knoten mit Formeln markiert sind, mit den folgenden Eigenschaften:

- Die Wurzel w von T ist mit F markiert.
- Für jeden Knoten k von T, der nicht ein Blatt ist, gilt eine der folgenden beiden Aussagen.
    - k hat genau einen Sohn und der ist mit α_1 oder mit α_2 markiert, wobei ein Knoten auf dem Weg von w nach k mit α markiert ist
    - k hat genau zwei Söhne und die sind mit β_1 bzw. β_2 markiert, wobei ein Knoten auf dem Weg von w nach k mit β markiert ist.

Tableaux

Definition

- Ein Ast eines Tableaus ist geschlossen, wenn er eine Formel A und ihre Negation $\neg A$ enthält.
- Ein Tableau ist geschlossen, wenn darin jeder Ast geschlossen ist.

Definition

Eine Tableau-Widerlegung einer Formel F ist ein endliches geschlossenes Tableau für F.

Der Tableaukalkül

Die Regeln des Tableaukalküls

$$\frac{\alpha}{\alpha_1} \qquad \frac{\alpha}{\alpha_2} \qquad \frac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2}$$

Das heißt:

- An einen Ast, der α enthält, kann man als Nachfolger α_1 anhängen.
- An einen Ast, der α enthält, kann man als Nachfolger α_2 anhängen.
- An einen Ast, der β enthält, kann man als Nachfolger β_1 und β_2 anhängen.

Der Tableaukalkül

- Zur Entwicklung eines Tableaus für F startet man mit dem trivialen Tableau, das nur aus der mit F markierten Wurzel besteht.
- Dann wendet man solange die Regeln des Tableaukalküls an, bis man ein geschlossenes Tableau bekommt.

Aufgaben

Aufgabe 17

Beweisen Sie die Formel $F = (P \wedge Q) \vee ((P \wedge (\neg Q \wedge R)) \vee ((\neg P \wedge R) \vee \neg R))$ mit der Konnektionsmethode und finden Sie eine dazu ähnliche Widerlegung im Tableaukalkül für die zu F duale Formel!

Aufgabe 18

Versuchen Sie, die Formel $((P \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q)) \wedge (\neg Q \vee P)$ im Tableaukalkül zu widerlegen!