

Effiziente Transformation in Normalform

Definitionelle Form

Definitionelle Form einer Formel F

- 1 Führe für jede Teilformel von F eine Aussagenvariable als Abkürzung ein.
- 2 Schreibe für jede dieser Aussagenvariablen die sie definierende Äquivalenz hin.
- 3 Ersetze auf der rechten Seite die unmittelbaren Teilformeln durch ihre Abkürzungen, also durch Aussagenvariablen.
- 4 Sei D die Konjunktion aller dieser Äquivalenzen und sei P die Abkürzung von F .
- 5 Verwandle die Formel $D \rightarrow P$ in DNF. Diese DNF ist genau dann allgemeingültig, wenn F allgemeingültig ist.

Beispiel

Formel $\neg(X \vee Y) \wedge Z$

$$P \leftrightarrow \neg(X \vee Y) \wedge Z$$

$$Q \leftrightarrow \neg(X \vee Y)$$

$$R \leftrightarrow X \vee Y$$

Beispiel (Fortsetzung)

$$P \leftrightarrow Q \wedge Z$$

$$Q \leftrightarrow \neg R$$

$$R \leftrightarrow X \vee Y$$

Formel:

$$(P \leftrightarrow Q \wedge Z) \wedge$$

$$(Q \leftrightarrow \neg R) \wedge$$

$$(R \leftrightarrow X \vee Y) \rightarrow$$

$$P$$

Beispiel (Fortsetzung)

$$\begin{aligned} & (\neg P \vee Q) \wedge \\ & (\neg P \vee Z) \wedge \\ & (P \vee \neg Q \vee \neg Z) \wedge \\ & (\neg Q \vee \neg R) \wedge \\ & (Q \vee R) \wedge \\ & (\neg R \vee X \vee Y) \wedge \\ & (R \vee \neg X) \wedge \\ & (R \vee \neg Y) \rightarrow \\ & P \end{aligned}$$

Beispiel (Fortsetzung)

$$(P \wedge \neg Q) \vee$$

$$(P \wedge \neg Z) \vee$$

$$(\neg P \wedge Q \wedge Z) \vee$$

$$(Q \wedge R) \vee$$

$$(\neg Q \wedge \neg R) \vee$$

$$(R \wedge \neg X \wedge \neg Y) \vee$$

$$(\neg R \wedge X) \vee$$

$$(\neg R \wedge Y) \vee$$

P

Satz

Zu jeder Formel F kann man eine Formel F' in DNF explizit konstruieren, die genau dann allgemeingültig ist, wenn F allgemeingültig ist. F' ist höchstens um einen konstanten Faktor länger als F und die Transformation ist effizient.

Satz

Zu jeder Formel F kann man eine Formel F' in KNF explizit konstruieren, die genau dann erfüllbar ist, wenn F erfüllbar ist. F' ist höchstens um einen konstanten Faktor länger als F und die Transformation ist effizient.

Beweis.

Betrachte $D \wedge P$ und verwandle es in KNF. □