Die Konnektionsmethode in der Aussagenlogik

Klauseln

Definition

Eine Klausel ist eine endliche Menge von Literalen.

- Eine Konjunktion $L_1 \wedge \cdots \wedge L_n$ von Literalen wird dargestellt als Klausel $\{L_1, \ldots, L_n\}$.
- Graphische Darstellung als Spalte

$$\begin{matrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{matrix}$$

Matrix

Definition

Eine Matrix ist eine endliche Menge von Klauseln.

- Eine Formel $(L_{11} \wedge \dots \wedge L_{1n_1}) \vee \dots \vee (L_{m1} \wedge \dots \wedge L_{mn_m})$ in DNF wird dargestellt als Matrix $\{\{L_{11}, \dots, L_{1n_1}\}, \dots, \{L_{m1}, \dots, L_{mn_m}\}\}$.
- Graphische Darstellung

$$\begin{array}{ccc} L_{11} & & L_{m1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ L_{1n_1} & & L_{mn_m} \end{array}$$

Konnektionen

Definition

- Zwei Literale heißen zueinander komplementär, wenn eines die Negation des anderen ist
- Eine Konnektion in einer Matrix ist ein Paar von komplementären Literalen der Matrix.

Pfade

Definition

Ein Pfad durch eine Matrix $\{c_1, \ldots, c_n\}$ ist eine Menge $\{L_1, \ldots, L_n\}$ von Literalen mit $L_1 \in c_1$, ..., $L_m \in c_m$.

Definition

Ein Pfad heißt komplementär, wenn er zwei zueinander komplementäre Literale enhält.

Definition

Eine Matrix heißt komplementär, wenn jeder Pfad durch sie komplementär ist.

Eine komplementäre Matrix

Beispiel

Die Formel $(P \land Q) \lor (\neg P \land Q \land R) \lor (\neg Q \land R) \lor \neg R$ hat die Matrix

$$
\begin{array}{cccc}
 & \neg P & & \\
P & & \neg Q & \\
 & Q & & \neg R \\
Q & & R & \\
 & R & &
\end{array}
$$

Diese Matrix hat 12 Pfade und ist komplementär.

Eine komplementäre Matrix

Beispiel

Die Formel $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg Q \wedge R) \vee \neg R$ hat die Matrix

$$\begin{array}{cccc} P & \neg P & \neg Q & \neg R \\ Q & Q & R & \\ & R & & \end{array}$$

Diese Matrix hat 12 Pfade und ist komplementär.

Eine komplementäre Matrix

Beispiel

Die Formel $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg Q \wedge R) \vee \neg R$ hat die Matrix

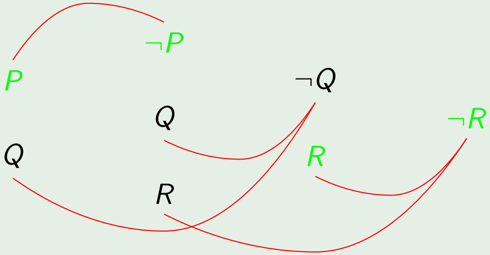
$$\begin{bmatrix} P & \neg P & \neg Q & \neg R \\ Q & Q & R & \\ & R & & \end{bmatrix}$$

Diese Matrix hat 12 Pfade und ist komplementär.

Eine komplementäre Matrix

Beispiel

Die Formel $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg Q \wedge R) \vee \neg R$ hat die Matrix



Diese Matrix hat 12 Pfade und ist komplementär.

Eine komplementäre Matrix

Beispiel

Die Formel $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg Q \wedge R) \vee \neg R$ hat die Matrix

$$\begin{array}{cccc} & \neg P & & \\ P & & \neg Q & \\ & Q & & \neg R \\ Q & & R & \\ & R & & \end{array}$$

Diese Matrix hat 12 Pfade und ist komplementär.

Eine komplementäre Matrix

Beispiel

Die Formel $(P \land Q) \lor (\neg P \land Q \land R) \lor (\neg Q \land R) \lor \neg R$ hat die Matrix

$$\begin{bmatrix} P & \neg P & \neg Q & \neg R \\ Q & Q & R & \\ & R & & \end{bmatrix}$$

Diese Matrix hat 12 Pfade und ist komplementär.

Eine komplementäre Matrix

Beispiel

Die Formel $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg Q \wedge R) \vee \neg R$ hat die Matrix

$$\begin{array}{cccc} P & \neg P & \neg Q & \neg R \\ Q & Q & R & \\ & R & & \end{array}$$

Diese Matrix hat 12 Pfade und ist komplementär.

Eine komplementäre Matrix

Beispiel

Die Formel $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg Q \wedge R) \vee \neg R$ hat die Matrix

$$\begin{array}{cccc} & \neg P & & \\ P & & \neg Q & \\ & Q & & \neg R \\ Q & & R & \\ & R & & \end{array}$$

Diese Matrix hat 12 Pfade und ist komplementär.

Eine komplementäre Matrix

Beispiel

Die Formel $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg Q \wedge R) \vee \neg R$ hat die Matrix

$$\begin{bmatrix} P & \neg P & \neg Q & \neg R \\ Q & Q & R & \\ & R & & \end{bmatrix}$$

Diese Matrix hat 12 Pfade und ist komplementär.

Eine komplementäre Matrix

Beispiel

Die Formel $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg Q \wedge R) \vee \neg R$ hat die Matrix

$$\begin{array}{cccc} & \neg P & & \\ P & & \neg Q & \\ & Q & & \neg R \\ Q & & R & \\ & R & & \end{array}$$

Diese Matrix hat 12 Pfade und ist komplementär.

Eine komplementäre Matrix

Beispiel

Die Formel $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg Q \wedge R) \vee \neg R$ hat die Matrix

$$\begin{array}{cccc} & \neg P & & \\ P & & \neg Q & \\ & Q & & \neg R \\ Q & & R & \\ & R & & \end{array}$$

Diese Matrix hat 12 Pfade und ist komplementär.

Eine komplementäre Matrix

Beispiel

Die Formel $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg Q \wedge R) \vee \neg R$ hat die Matrix

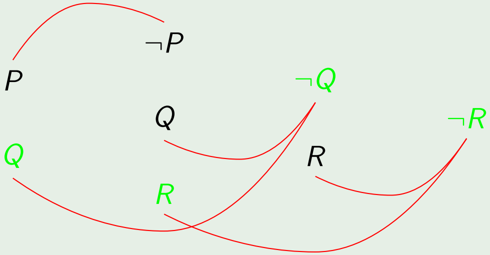
$$
\begin{array}{cccc}
 & \neg P & & \\
P & & \neg Q & \\
 & Q & & \neg R \\
Q & & R & \\
 & R & &
\end{array}
$$

Diese Matrix hat 12 Pfade und ist komplementär.

Eine komplementäre Matrix

Beispiel

Die Formel $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg Q \wedge R) \vee \neg R$ hat die Matrix



Diese Matrix hat 12 Pfade und ist komplementär.

Eine komplementäre Matrix

Beispiel

Die Formel $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg Q \wedge R) \vee \neg R$ hat die Matrix

$$\begin{array}{cccc} & \neg P & & \\ P & & \neg Q & \\ & Q & & \neg R \\ Q & & R & \\ & R & & \end{array}$$

Diese Matrix hat 12 Pfade und ist komplementär.

Eine nicht komplementäre Matrix

Beispiel

Die Formel $P \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge P)$ hat die Matrix

$$\begin{array}{ccc} & \neg P & \neg Q \\ P & & \\ & Q & P \end{array}$$

Eine nicht komplementäre Matrix

Beispiel

Die Formel $P \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge P)$ hat die Matrix

$$\begin{matrix} & \neg P & \neg Q \\ P & & \\ & Q & P \end{matrix}$$

Sie ist nicht komplementär, da der Pfad $\{P, Q, P\}$ nicht komplementär ist.

Eine Charakterisierung der Allgemeingültigkeit

Satz

- *Eine Formel F in DNF ist genau dann allgemeingültig, wenn ihre Matrix komplementär ist.*
- *Ist ein Pfad durch ihre Matrix nicht komplementär, so kann man ein Modell von $\neg F$ konstruieren, indem jedes Literal dieses Pfades als falsch interpretiert wird.*

Bemerkung

Die Menge der Pfade durch F liefert eine KNF von F durch Ausmultiplizieren.

Beispiel

Die Formel $P \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge P)$ hat die Matrix

$$\begin{array}{ccc} & \neg P & \neg Q \\ P & & \\ & Q & P \end{array}$$

Ausmultiplizieren liefert die KNF

Beispiel

Die Formel $P \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge P)$ hat die Matrix

$$\begin{array}{ccc} & \neg P & \neg Q \\ P & & \\ & Q & P \end{array}$$

Ausmultiplizieren liefert die KNF

$$(P \vee \neg P \vee \neg Q) \wedge$$

Beispiel

Die Formel $P \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge P)$ hat die Matrix

$$\begin{array}{ccc} & \neg P & \neg Q \\ P & & \\ & Q & P \end{array}$$

Ausmultiplizieren liefert die KNF

$$(P \vee \neg P \vee \neg Q) \wedge$$
$$(P \vee \neg P \vee P) \wedge$$

Beispiel

Die Formel $P \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge P)$ hat die Matrix

$$\begin{array}{ccc} & \neg P & \neg Q \\ P & & \\ & Q & P \end{array}$$

Ausmultiplizieren liefert die KNF

$$\begin{array}{c} (P \vee \neg P \vee \neg Q) \wedge \\ (P \vee \neg P \vee P) \wedge \\ (P \vee Q \vee \neg Q) \wedge \end{array}$$

Beispiel

Die Formel $P \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge P)$ hat die Matrix

$$\begin{array}{ccc} & \neg P & \neg Q \\ P & & \\ & Q & P \end{array}$$

Ausmultiplizieren liefert die KNF

$$\begin{array}{c} (P \vee \neg P \vee \neg Q) \wedge \\ (P \vee \neg P \vee P) \wedge \\ (P \vee Q \vee \neg Q) \wedge \\ (P \vee Q \vee P) \end{array}$$

Die Konnektionsmethode

- ist eine Methode zum Nachweis, ob eine Formel allgemeingültig ist.
- ist am einfachsten darzustellen, wenn die Formel in DNF ist.

Die Konnektionsmethode

1. Zeichne die Matrix der Formel.
2. Nun werden systematisch alle Pfade durch die Matrix auf Komplementarität überprüft.

Ein ungelöstes Literal ist ein Literal L, sodass die Pfade durch L noch auf Komplementarität zu überprüfen sind.

Die Konnektionsmethode

Beispiel

Die Formel $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg Q \wedge R) \vee \neg R$ hat die Matrix

$$\begin{array}{cccc}
 & \neg P & & \\
P & & \neg Q & \\
 & Q & & \neg R \\
Q & & R & \\
 & R & &
\end{array}$$

Die Konnektionsmethode

Beispiel

Konnektionsbeweis der Formel:

$$
\begin{array}{cccc}
 & \neg P & & \\
{\color{blue}P} & & \neg Q & \\
 & Q & & \neg R \\
{\color{blue}Q} & & R & \\
 & R & &
\end{array}
$$

1

Die Konnektionsmethode

Beispiel

Konnektionsbeweis der Formel:

$$\begin{array}{cccc}
 & \neg P & & \\
P & & \neg Q & \\
 & Q & & \neg R \\
Q & & R & \\
 & R & & \\
 & & & \\
1 & 2 & &
\end{array}$$

Die Konnektionsmethode

Beispiel

Konnektionsbeweis der Formel:

$$
\begin{array}{cccc}
 & \neg P & & \\
P & & \neg Q & \\
 & Q & & \neg R \\
Q & & R & \\
 & R & & \\
 & & & \\
1 & 2 & 3 &
\end{array}
$$

Die Konnektionsmethode

Beispiel

Konnektionsbeweis der Formel:

$$\begin{array}{cccc}
 & \neg P & & \\
P & & \neg Q & \\
 & Q & & \neg R \\
Q & & R & \\
 & R & & \\
 & & & \\
1 & 2 & 3 & 4
\end{array}$$

Die Konnektionsmethode

Beispiel

Konnektionsbeweis der Formel:

$$
\begin{array}{cccc}
 & \neg P & & \\
P & & \neg Q & \\
 & Q & & \neg R \\
Q & & R & \\
 & R & & \\
 & & & \\
1 & 2 & &
\end{array}
$$

Die Konnektionsmethode

Beispiel

Konnektionsbeweis der Formel:

$$
\begin{array}{cccc}
 & \neg P & & \\
P & & \neg Q & \\
 & Q & & \neg R \\
Q & & R & \\
 & R & & \\
 & & & \\
1 & 2 & & 3
\end{array}
$$

Die Konnektionsmethode

Beispiel

Konnektionsbeweis der Formel:

$$\begin{array}{cccc} & \neg P & & \\ P & & \neg Q & \\ & Q & & \neg R \\ {\color{blue}Q} & & R & \\ & R & & \end{array}$$

1

Die Konnektionsmethode

Beispiel

Konnektionsbeweis der Formel:

$$
\begin{array}{cccc}
 & \neg P & & \\
P & & \neg Q & \\
 & Q & & \neg R \\
Q & & R & \\
 & R & & \\
 & & & \\
1 & & 2 &
\end{array}
$$

Die Konnektionsmethode

Beispiel

Konnektionsbeweis der Formel:

$$
\begin{array}{cccc}
 & \neg P & & \\
P & & \neg Q & \\
 & Q & & \neg R \\
Q & & R & \\
 & R & & \\
 & & & \\
1 & & 2 & 3
\end{array}
$$

Die Konnektionsmethode

Beispiel

Konnektionsbeweis der Formel:

$$
\begin{array}{cccc}
 & \neg P & & \\
P & & \neg Q & \\
 & Q & & \neg R \\
Q & & R & \\
 & R & &
\end{array}
$$

Damit ist die Formel bewiesen.

Aufgabe 12

Versuchen Sie, einen Konnektionsbeweis für die Formel $P \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge P)$ durchzuführen! An welcher Stelle scheitert der Versuch?

Aufgabe 13

Implementieren Sie die Konnektionsmethode in Prolog!

Aktiver Pfad, ungelöste Literale

- Aktiver Pfad $\{L_1, \ldots, L_k\}$ $\quad (k \geq 0)$.
- Zu jedem $j = 1, \ldots, k$ ist zugeordnet das j-te Literal L_j des aktiven Pfades.
- Zu jedem $j = 1, \ldots, k+1$ eine Klausel c_j der Matrix.
- Zu jedem $j = 1, \ldots, k+1$ eine Menge d_j von ungelösten Literalen.
  Es gilt $d_j \subset c_j$ und $L_j \notin d_j$ für $j \leq k$.

Pfadmenge

Pfadmenge der noch zu überprüfenden Pfade

Menge aller Pfade $\{L_1, \ldots, L_j, K\}$ mit $0 \leq j \leq k$ und $K \in d_{j+1}$.

Alle Verlängerungen dieser Pfade durch die gesamte Matrix sind noch auf Komplementarität zu überprüfen.

Pfadmenge

Beispiel

	$\neg P$		
P		$\neg Q$	
	Q		$\neg R$
Q		R	
	R		
1	2	3	

Pfadmenge $\{\{P, Q, R\}, \{P, R\}, \{Q\}\}$.

Vereinfachungsregeln

Definition (Subsumption)

Eine Klausel c subsumiert eine Klausel d, wenn $c \subset d$ gilt.

Subsumptions-Regel

Wenn in einer Matrix eine Klausel c eine andere Klausel d subsumiert, dann darf d aus der Matrix entfernt werden.

Beispiel

$$P \quad \begin{matrix} P \\ Q \end{matrix} \quad \ldots$$

Die Klausel $\{P\}$ subsumiert die Klausel $\{P, Q\}$.
Daher darf $\{P, Q\}$ entfernt werden.

Vereinfachungsregeln

Definition (Tautologische Klauseln)

Eine Klausel c heißt tautologisch, wenn sie ein Literal L und das zu L komplementäre Literal $\overline{L}$ enthält.

Tautologie-Regel

Tautologische Klauseln können aus einer Matrix entfernt werden.

Beispiel

$$\begin{matrix} P & \\ \neg P & \cdots \end{matrix}$$

Die Klausel $\{P, \neg P\}$ darf entfernt werden.

Vereinfachungsregeln

Definition (Einerklauseln)

Eine Einerklausel (englisch unit clause) ist eine Klausel $\{L\}$.

Lemma

Wenn $\{L\} \in M$, *dann ist* M *genau dann komplementär, wenn* $\{c \setminus \{\overline{L}\} \mid c \in M \setminus \{\{L\}\}\}$ *komplementär ist.*

Einerklausel-Resolution

Die Matrix M darf durch diese einfachere Matrix ersetzt werden.

Beispiel

$$\begin{matrix} P & \neg P & \neg P & S \\ & Q & R & T \end{matrix} \quad \text{vereinfacht sich zu} \quad \begin{matrix} Q & R & S \\ & & T \end{matrix}$$